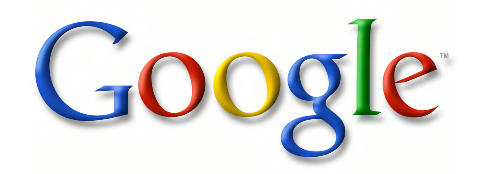
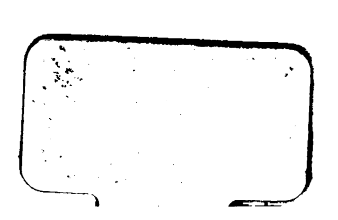






LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

DR. HEINRICH LIEBMANN,
PRIVATDOZENTEN AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
VERLAG VON VEIT & COMP.
1901

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Wenn in einem kurzen Lehrbuch ein Überblick gegeben werden soll über eine so große Disziplin, wie sie die Theorie der Differentialgleichungen bildet, so können unmöglich alle Gebiete derselben gleichmäßig berücksichtigt werden.

In dem vorliegenden Buch tritt nun hauptsächlich die Geometrie in den Vordergrund; an geometrischen Beispielen sollen alle entwickelten Sätze erläutert werden, auch solche, bei denen es bisher vielleicht in einem Lehrbuch noch nicht in dem Maße geschehen ist (wie z. B. bei den singulären Lösungen § 18 und 21 und den singulären Punkten § 19 und 24).

Die Funktionentheorie ist fast nur in den Existenzbeweisen im ersten Kapitel berücksichtigt worden. Es konnte auch auf eine Darstellung dieser Seite des Gebiets um so eher verzichtet werden, da dies ja von anderer Seite bereits geschehen ist.

Im übrigen wird ausgiebig Gebrauch gemacht von den geometrischen Begriffen „Linienelement“, „Flächenelement“ u. s. w., durch welche Lie die von Monge zuerst begonnene geometrische Veranschaulichung der Integrationstheorie so sehr gefördert hat. (Seine Theorie der Transformationsgruppen, welche in den von Lie zusammen mit Engel und Scheffers veröffentlichten Werken außer den geometrischen Betrachtungen dargestellt ist, ist hier nirgends angewendet worden.)

Die geometrischen Begriffe erweisen sich besonders fruchtbar bei den partiellen Differentialgleichungen. Sie ermöglichen es, die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zunächst an einem einfachen Beispiel zu entwickeln und von da aus auf alle anderen derartigen Differentialgleichungen zu übertragen. (Eine noch einfachere Ableitung der Charakteristikentheorie, welche G. Kowalewski kürzlich gegeben hat [Berichte der K. Sächs.

Ges. d. W., Math.-Phys. Klasse 1900, S. 91 ff.], konnte leider nicht mehr aufgenommen werden.)

Auch die Elemente der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ließen sich mit Hilfe der von F. ENGEL eingeführten homogenen Koordinaten für die Krümmungselemente (Leipziger Berichte, 1893, S. 468 ff.) noch mit entwickeln. Diese homogenen Koordinaten ermöglichten es nämlich, ein sehr einfaches Beispiel zum Ausgangspunkt zu wählen (§ 41).

Zum Schluß möchte ich an dieser Stelle meinem Freund und Kollegen G. KOWALEWSKI meinen Dank dafür aussprechen, daß er bei vielen einzelnen Fragen mir seinen Rat erteilt hat (z. B. verdanke ich ihm den Anhang). Ebenso bin ich der Verlagsbuchhandlung für die sorgfältige Herstellung der Figuren und die elegante Ausstattung zu besonderem Dank verpflichtet.

Leipzig, im Oktober 1900.

H. Liebmann.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Definitionen und Existenzbeweise.

Zweites Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei Veränderlichen.

Drittes Kapitel.

Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Viertes Kapitel.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln.

Fünftes Kapitel.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Erstes Kapitel.

Definitionen und Existenzbeweise.

§ 1. Die impliciten Funktionen einer Variabeln.

1. **Das Problem der impliciten Funktionen.** Es wird später bei der Theorie des Differentialgleichungen öfters Gebrauch gemacht von impliciten Funktionen, d. h. von Funktionen, welche dadurch zu bestimmen sind, daß man eine analytische Funktion von mehreren Veränderlichen gleich Null setzt. Dabei ist die Hauptfrage, ob solche impliciten Funktionen existieren. In dem Fall einer zu bestimmenden Funktion von einer einzigen Veränderlichen lautet die Frage z. B. so:

Gegeben ist eine analytische Funktion von zwei Variabeln

$$F(x, y).$$

Für $x = x_0$, $y = y_0$ *möge diese Funktion verschwinden. Kann man dann eine analytische Funktion*

$$y = f(x)$$

angeben, welche die Gleichung

$$F(x, f(x)) = 0$$

erfüllt und sich für $x = x_0$ *auf* $y = y_0$ *reduziert?*

Ähnliche Fragestellungen ergeben sich, wenn man aus einer Gleichung

$$F(x_1, \ldots x_n, y) = 0$$

y als Funktion der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bestimmen soll, oder aus dem System von Gleichungen

$$F_1(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m) = 0,$$
$$F_2(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_m(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m) = 0$$

die Variabeln $y_1 \ldots y_m$ als Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$.

2. **Die Wurzeln einer analytischen Gleichung.** Wir gehen von der Bestimmung einer impliciten Funktion einer einzigen Variabeln aus und wollen annehmen, daß für $x = 0$, $y = 0$ die Funktion $F(x, y)$ analytisch ist und den Wert Null annimmt.

Wir wollen ferner annehmen, daß für $x = 0$, $y = 0$ die Größen

$$\frac{\partial^{(n-1)} F}{\partial y^{(n-1)}}, \; \frac{\partial^{(n-2)} F}{\partial y^{(n-2)}} \cdots \frac{\partial F}{\partial y}$$

sämtlich verschwinden, ebenso wie $F(x, y)$ selbst. Dagegen möge für dieses Wertsystem der Differentialquotient $\frac{\partial^{(n)} F}{\partial y^{(n)}}$ nicht verschwinden.

Die Funktion $F(x, y)$ hat dann die Form

$$F(x, y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 \ldots + A_{n-1} y^{n-1} + A_n y^n + \ldots,$$

wo die Größen A_0, $A_1 \ldots A_{n-1}$ analytische Funktionen von x sind, welche für $x = 0$ verschwinden. Die Koeffizienten A_n, $A_{n+1} \ldots$ sind ebenfalls analytische Funktionen, und es verschwindet die Funktion A_n sicher nicht für $x = 0$.

Nun setzen wir

$$F(x, y) = A_n y^n \left(\frac{A_0}{A_n y^n} \ldots + \frac{A_{n-1}}{A_n y} + 1 + \frac{A_{n+1}}{A_n} y + \ldots \right).$$

Wir wollen jetzt die Funktion $F(x, y)$ und ihr Verhalten in einem gewissen Gebiet betrachten.

Wir setzen zunächst $|x| \leqq \varrho_0$ und $|y| = r$, wobei ϱ_0 und r weiterhin noch zu bestimmen sind.

ϱ_0 soll so bestimmt werden, daß die Bedingung erfüllt ist:

$$|A_n| \geqq m, \quad \text{wenn} \quad |x| \leqq \varrho_0.$$

Den größten Wert unter den Maximis der Funktionen

$$|A_k| \quad (k = n + 1,\; n + 2,\; n + 3 \ldots)$$

im Gebiete

$$|x| \leqq \varrho_0$$

wollen wir dann mit M_1 bezeichnen. Den größten Wert unter den Maximis der Funktion

$$A_0,\; A_1 \ldots A_{n-1}$$

in diesem Gebiet wollen wir ferner mit M_0 bezeichnen.

Setzen wir also $|y| = r$, so ist

$$\left| \frac{A_{n+1}}{A_n} y + \frac{A_{n+2}}{A_n} y^2 + \cdots \right| < \frac{M_1}{m} \cdot \frac{r}{1-r}$$

und

$$\left| \frac{A_0}{A_n y^n} + \frac{A_1}{A_n y^{n-1}} \cdots + \frac{A_{n-1}}{A_n y} \right| < \frac{M_0}{m} \cdot R,$$

wo

$$R = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdots + \left(\frac{1}{r}\right)^n$$

ist.

Nun wählen wir r so klein, daß die Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{M_1}{m} \frac{r}{1-r} < \frac{1}{2}.$$

Endlich ersetzen wir die Grenze ϱ_0, die für den absoluten Betrag von x festgesetzt wurde, durch eine andere — kleinere — Grenze ϱ. Diese Grenze wird so bestimmt, daß

$$\frac{M_0}{m} \cdot R < \frac{1}{2}$$

ist, sobald $|x| < \varrho$. Es muß sich hierbei eine von Null verschiedene Zahl ϱ ergeben, da ja für $x = 0$ die Größe M_0 selbst verschwindet, also für hinreichend kleine Werte von x beliebig klein wird.

Setzen wir nun $|y| = r$ und $|x| \leqq \varrho$, und bilden das Integral

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F} dy,$$

welches in der komplexen Ebene in positiver Richtung auf der Peripherie des Kreises vom Radius r zu erstrecken ist, so kommt

$$\frac{1}{2i\pi} \int d \log A_n y^n + \int d \log \left\{ \frac{A_0}{A_n y^n} \cdots + \frac{A_{n-1}}{A_n y} + 1 + \frac{A_{n+1}}{A_n} y + \cdots \right\};$$

von diesen beiden Integralen verschwindet das zweite, da der reelle Teil der Funktion, deren logarithmischer Differentialquotient betrachtet wird, von Null verschieden ist. (Sie besteht aus drei Teilen, von denen der eine gleich Eins ist, und die beiden anderen ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}$.) Das zweite hat den Wert $2ni\pi$.[1]

Im ganzen also kommt:

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{\partial \log F(x,y)}{\partial y} dy = n.$$

Hieraus folgt aber nach dem CAUCHY'schen Satz,[1] daß die Anzahl der Nullstellen der Funktion $F(x,y)$ gleich n ist.

[1] BURKHARDT, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen, § 45.

Wir haben also das wichtige Ergebnis:

Verschwindet für $x = 1$, $y = 0$ die analytische Funktion $F(x, y)$, zugleich mit ihren $n - 1$ ersten nach y genommenen partiellen Differentialquotienten, während $\frac{\partial^n F}{\partial y^n}$ nicht verschwindet, so hat die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

n Wurzeln für hinreichend kleine Werte von x.

Von diesen Wurzeln können natürlich mehrere zusammenfallen.

3. **Die algebraische Gleichung zur Bestimmung der Wurzeln einer analytischen Gleichung.** Da die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

unter den gemachten Voraussetzungen n Wurzeln hat, so liegt die Vermutung nahe, daß diese Wurzeln zugleich Wurzeln einer analytischen Gleichung $n$ten Grades sind.

In der That kann man zunächst zeigen, daß die Summen von den ganzzahligen Potenzen der Wurzeln, also z. B. die Summe

$$S_2 = {y_1}^2 + {y_2}^2 \ldots + {y_n}^2$$

analytische Funktionen sind.

Denn es ist nach dem Cauchy'schen Satz das über den Rand des Kreises vom Radius r erstreckte Integral:

$$\frac{1}{2 i \pi} \int y^k \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{F(x, y)} d y = {y_1}^k + {y_2}^k \ldots + {y_n}^k,$$

unter y_i diejenigen Wurzeln verstanden, welche die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

hat.

Andererseits ist das Integral eine analytische Funktion von x, also folgt:

Die Summe der Potenzen der Wurzeln $S_k = {y_1}^k + {y_2}^k \ldots + {y_n}^k$ ist eine analytische Funktion von x.

Aus den Summen der Potenzen der Wurzeln lassen sich aber alle anderen symmetrischen Funktionen berechnen, also auch die Koeffizienten der Gleichung

$$\varphi(x, y) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} \ldots + a_n = 0.$$

Diese Koeffizienten sind also analytische Funktionen von x.

Demnach haben wir das Ergebnis:

Die Wurzeln der Gleichung

$$F(x,y) = 0$$

sind zugleich Wurzeln einer algebraischen Gleichung nten Grades in y

$$\varphi(x,y) = 0,$$

deren Koeffizienten analytische Funktionen von x sind.

4. **Die Wurzeln als analytische Funktionen von x.** Die Gleichung

$$\varphi(x,y) = 0$$

kann entweder lauter einfache Wurzeln, oder — für jeden Wert von x — mehrfache Wurzeln haben. Ist letzteres der Fall, so ersetzen wir sie durch eine Gleichung $\psi(x,y) = 0$, welche nur einfache Wurzeln hat.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind dann analytische Funktionen von x, welche nur an solchen Stellen aufhören analytisch zu sein, wo mehrere Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x,y) = 0 \quad \text{resp.} \quad \psi(x,y) = 0$$

zusammenfallen.

Also haben wir schließlich den Satz:

Ist $F(x,y)$ eine analytische Funktion, welche für $x = 0$, $y = 0$ nebst den Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdots \frac{\partial^{(n-1)} F}{\partial y^{(n-1)}}$$

verschwindet, während $\frac{\partial^n F}{\partial y^n}$ von Null verschieden ist, so giebt es analytische Funktionen

$$y_i = f_i(x) \quad (i = 1 \ldots n),$$

welche die Gleichung

$$F(x,y) = 0$$

identisch erfüllen.

Zu bemerken ist, daß gerade für $x = 0$ die Funktion aufhören kann analytisch zu sein. Es giebt aber dann doch analytische Funktionen, welche die Gleichung erfüllen und für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annehmen.

Ist $\frac{\partial F}{\partial y}$ von 0 verschieden für $x = y = 0$, so bekommt man das einfache Ergebnis, daß die Gleichung

$$F(x,y) = 0$$

y als analytische, für $x = 0$ verschwindende Funktion von

x eindeutig bestimmt und daß diese Funktion auch noch für $x = 0$ analytisch ist.

5. **Eine Erweiterung.** Die Voraussetzung, daß nicht alle Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdots$$

für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden, ist bei der angewendeten Beweismethode notwendig. Diese Voraussetzung ist aber in vielen einfachen Fällen nicht erfüllt, wo doch eine implicite Funktion existiert.

Z. B. definiert die Gleichung

$$xy = 0$$

y als analytische Funktion von x (diese Funktion y ist nämlich einfach

$$y = 0),$$

obwohl alle Differentialquotienten der Funktion xy genommen nach y verschwinden für $x = y = 0$.

In einem solchen Falle kann man durch eine geeignete Transformation auf den früheren Fall zurückkommen.

Man ordnet zunächst nach Gliedern gleicher Dimension

$$F(x,y) = F_m(x,y) + \ldots$$

(m sei die niedrigste Dimension).

F_m hat die Form

$$\sum_{i=0}^{i=m} a_{i,m-i}\, x^i y^{m-i}.$$

Setzt man jetzt

$$x = x_1 + \alpha y_1,$$
$$y = y_1,$$

so wird aus F_m die Funktion

$$\bar{F}_m = \sum_{i=0}^{i=m} a_{i,m-i} (x_1 + \alpha y_1)^i y_1^{m-i},$$

in der man nun α so bestimmen kann, daß der Koeffizient von y_1^m, nämlich

$$a_{0m} \ldots + a_{m0}\,\alpha^m,$$

nicht verschwindet.

Die analytische Funktion

$$\bar{F}(x_1 y_1),$$

welche entsteht, wenn man an Stelle von x und y die Variabeln x_1 und y_1 einführt, hat dann die Eigenschaft, daß für $x_1 = y_1 = 0$

$$\bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_1} = \cdots = \frac{\partial^{(m-1)} \bar{F}}{\partial {y_1}^{m-1}} = 0$$

ist, dagegen

$$\frac{\partial^m F}{\partial {y_1}^m}$$

von Null verschieden, und man kann also y_1 als analytische Funktion von x_1 bestimmen.

In dem Beispiel würde man so verfahren, um die Existenz zu beweisen: Man setzt etwa

$$x = x_1 + y_1,$$
$$y = x_1 - y_1,$$

dann kommt

$$x \cdot y = (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) = {x_1}^2 - {y_1}^2 = 0,$$

und nun ist

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x_1, y_1)}{\partial^2 {y_1}^2}_{(x_1 = y_1 = 0)} = -2$$

(also von Null verschieden!). Hieraus folgt dann die Existenz einer Lösung der Gleichung.

6. Beispiele von impliciten Funktionen.

a) Gegeben sei die Gleichung

$$F(x, y) = \sin y(1 - x) = 0.$$

Die gegebene Funktion verschwindet für $x = 0$, $y = 0$, während der Differentialquotient

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (1 - x) \cos y(1 - x)$$

nicht verschwindet.

Es giebt also eine analytische Funktion, welche die Gleichung erfüllt. Diese Funktion ist

$$y = 0.$$

b) Es sei

$$F(x, y) = \sin (y - x)^2 = 0.$$

Hier ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=y=0} = 2(y - x) \cos (y - x)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x=y=0} = 2 \cos (y - x)^2 - 4(y - x)^2 \sin (y - x)^2 = 2.$$

Die analytische Gleichung zur Bestimmung von y wird:

$$\varphi(x, y) = (y - x)^2 = 0$$

und ist zu ersetzen durch

$$\psi(x, y) = y - x = 0.$$

Als Resultat kommt also schließlich

$$y = x.$$

c) Es sei

$$F(x, y) = 1 - e^{y^2 - x}.$$

Diese Funktion verschwindet für $x = 0$, $y = 0$. Ebenso verschwindet auch der erste Differentialquotient

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y\, e^{y^2 - x},$$

während der zweite

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2\, e^{y^2 - x} - 4y^2\, e^{y^2 - x}$$

nicht verschwindet.

Zur Bestimmung von y dient die Gleichung

$$y^2 - x = 0,$$

welche die Wurzeln

$$y_1 = +\sqrt{x} \quad \text{und} \quad y_2 = -\sqrt{x}$$

hat. y_1 und y_2 sind zwar für $x = 0$ nicht mehr analytisch, aber doch bis zu dieser Stelle hin.

§ 2. Implicite Funktionen von mehreren Veränderlichen und Systeme von solchen Funktionen.

1. Bestimmung einer impliciten Funktion von mehreren Veränderlichen. Der im vorigen Paragraphen genau durchgeführte Beweis der Möglichkeit der Bestimmung einer impliciten Funktion einer einzigen Veränderlichen läßt sich leicht verallgemeinern, und man gelangt zu dem folgenden Satz:

Es sei $F(x_1, \ldots x_n, y)$ eine analytische Funktion der Argumente $y\, x_1 \ldots x_n$ in der Umgebung der Stelle $y = x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$. Es sei außerdem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq 0 \quad \text{für} \quad y = x_i = 0 \quad (i = 1 \ldots n).$$

Dann giebt es eine analytische Funktion

$$y = f(x_1, \ldots x_n),$$

welche die Gleichung

$$F\big(f(x_1, x_2, \ldots x_n), x_1, \ldots x_n\big) = 0$$

erfüllt und für

$$x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$$

den Wert Null annimmt.

Der Beweis dieses Satzes wird durch Reduktion auf den Satz in § 1, 4 geführt. Man setze nämlich

$$x_1 = \alpha_1 t \ldots x_n = \alpha_n t.$$

Dann kann man für die Gleichung

$$\bar{F}(y, t) = F(y, \alpha_1 t \ldots \alpha_n t)$$

die Existenz der impliciten Funktion

$$y = \bar{\varphi}(t)$$

beweisen, welche für $t = 0$ den Wert $y = 0$ annimmt.

Ersetzt man hinterher in dieser impliciten Funktion die Größen

$$\alpha_1^{k_1} t^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} t^{k_n}$$

durch

$$x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

so erhält man die analytische Funktion

$$y = \varphi(x_1, \ldots x_n),$$

welche die Auflösung der gegebenen Gleichung

$$F(y, x_1, \ldots x_n) = 0$$

ist. —

Verschwindet dagegen für

$$x_1 = \ldots x_n = y = 0$$

nicht nur der erste Differentialquotient

$$\frac{\partial F}{\partial y},$$

sondern auch eine Reihe höherer Differentialquotienten, etwa alle bis zum $(n-1)$ten, so kann man zwar auch (§ 1, 4) die Existenz von analytischen Lösungen (impliciten Funktionen)

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots x_n)$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_n = \varphi_n(x_1, \ldots x_n)$$

nachweisen, doch brauchen diese Funktionen nicht mehr für $x_1 \ldots = x_n = 0$ analytisch zu sein.

2. **Beispiele.**

a) Die Gleichung

$$F(x_1, x_2, y) = 1 - e^{y - \sin x_1 - \sin x_2} = 0$$

hat die Lösung

$$y = \sin x_1 + \sin x_2,$$

welche y als analytische Funktion von x_1 und x_2 definiert.

Es ist in der That auch

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\x_1=0\\x_2=0}} = e^{y-\sin x_1-\sin x_2} = 1,$$

also von Null verschieden.

b) Die Gleichung

$$\sin\left(y - (\sin x_1 + \sin x_2)\right)^2 = 0$$

hat die Lösung

$$y = \sin x_1 + \sin x_2,$$

welche auch für $x_1 = x_2 = 0$ analytisch ist, obwohl für $x_1 = x_2 = y = 0$ nicht nur die Funktion $F(x, y)$ selbst verschwindet, sondern auch der Differentialquotient

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\,(y - \sin x_1 - \sin x_2)\cos(y - \sin x_1 - \sin x_2)^2.$$

c) Die Gleichung

$$F(x_1, x_2, y) = 1 - \cos\left(y^2 - (x_1 + x_2)\right) = 0$$

hat die folgenden beiden für $x_1 = x_2 = 0$ verschwindenden Lösungen

$$y_1 = +\sqrt{x_1 + x_2}$$

und

$$y_1 = -\sqrt{x_1 + x_2}.$$

Hier ist

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y\,.\sin\left(y^2 - (x_1 + x_2)\right) = 0 \text{ für } x_1 = x_2 = y = 0.$$

3. **Systeme von impliciten Funktionen, die durch Systeme von analytischen Gleichungen gegeben sind.** Indem man den Satz über die Bestimmung einer impliciten Funktion von n Variabeln mit Hilfe einer analytischen Gleichung verallgemeinert, gelangt man zu dem folgenden Satz:

Gesetzt, es verschwinden die in der Umgebung der Stelle $x_1 = \dots x_n = y_1 \dots y_m = 0$ analytischen Funktionen ihrer Argumente

$$F_1(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m),\; F_2(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) \dots F_m(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)$$

für diese Werte der Argumente, während an derselben Stelle die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so werden die Größen $y_1 \dots y_m$ durch die Gleichungen

$$F_1(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m) = 0,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$F_m(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m) = 0$$

als analytische Funktionen der Argumente $x_1 \ldots x_n$ *definiert, welche für* $x_1 = x_2 \ldots x_n = 0$ *sämtlich verschwinden.*

Man kann diesen Satz beweisen durch das Schlußverfahren von $m-1$ auf m, indem man das gegebene Problem in ein Problem mit weniger Variabeln reduziert. Diese Reduktion wird in folgender Weise ausgeführt:

Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial F_1}{\partial y_m}$$

können an der Stelle Null nicht sämtlich verschwinden, weil sonst die Funktionaldeterminante verschwinden würde. Wir können daher annehmen, daß mindestens einer von ihnen, etwa $\frac{\partial F_1}{\partial y_m}$, an dieser Stelle von Null verschieden ist. Dann kann man nach § 2, 1 aus der Gleichung

$$F_1(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m) = 0$$

die implicite Funktion

$$y_m = \varphi(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_{m-1})$$

bestimmen, welche an der Stelle $x_1 \ldots = x_n = y_1 \ldots = y_{m-1}$ verschwindet.

Läßt man nun die erste der gegebenen Gleichungen fort und substituiert den Wert

$$y_m = \varphi(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_{m-1})$$

in die $m-1$ übrig bleibenden, so hat man aus diesen Gleichungen dann nur noch die Variabeln $y_1 \ldots y_{m-1}$ als Funktionen von $x_1 x_2 \ldots x_n$ zu bestimmen.

Die Funktionaldeterminante dieser Gleichungen hat den Wert

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & -\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_m}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante der $m - 1$ Gleichungen, in denen der berechnete Wert von y_m substituiert ist, unterscheidet sich also von der Funktionaldeterminante der m Gleichungen nur um einen Faktor, der an der Stelle Null nicht verschwindet. Sie verschwindet also nicht an der Stelle Null, und man kann die Größen $y_1 \ldots y_{m-1}$ der Voraussetzung nach aus den $m - 1$ Gleichungen bestimmen, und daher auch die Größe

$$y_m = \varphi(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_{m-1})$$

als Funktion von $x_1 \ldots x_n$.

Durch das Schlußverfahren von $m - 1$ auf m ist also hiermit der ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 3. Reguläre Transformationen und ihre Umkehrungen.

1. **Definition der regulären Transformationen.** Unter einer regulären Transformation wollen wir die folgende Operation verstehen. *Gegeben sind die analytischen Funktionen*

$$x_1 = f_1(x_1' \ldots x_n'),$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = f_n(x_1' \ldots x_n'),$$

deren Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n'} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1 \ldots f_n)}{D(x_1' \ldots x_n')}$$

in der Umgebung eines Wertsystems von Null verschieden ist. Durch diese Gleichungen sollen an Stelle der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ die Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$ eingeführt werden.

Man kann sofort die folgende Eigenschaft der regulären Transformationen einsehen: *Die Aufeinanderfolge von zwei regulären Transformationen ist wieder eine reguläre Transformation.*

Sind nämlich die beiden regulären Transformationen gegeben:

$$x_i = f_i(x_1' \ldots x_n') \quad (i = 1 \ldots n)$$

und

$$x_k' = \varphi_k(x_1'' \ldots x_n'') \quad (k = 1 \ldots n),$$

so sind die Funktionen

$$x_i = f_i(\varphi_1(x_1'' \ldots x_n'') \ldots \varphi_n(x_1'' \ldots x_n''))$$

wieder analytisch und die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(x_1 \ldots x_n)}{D(x_1'' \ldots x_n'')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1'} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1''} \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n'} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1''}, \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1'} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n''} \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n'} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n''} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1'} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1''} \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n'} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1''}, \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1'} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n''} \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n'} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n''} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n'} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1''} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1''} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n''} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n''} \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht, weil sie das Produkt von zwei nicht verschwindenden Determinanten ist.

Die Funktionen

$$x_i = f_i(\varphi_1(x_1'' \ldots x_n'') \ldots \varphi_n(x_1'' \ldots x_n''))$$

erfüllen also die Bedingungen einer regulären Transformation, d. h. es gilt der ausgesprochene Satz.

2. **Die inverse Transformation.** Durch die Sätze in § 2 sind wir in den Stand gesetzt, die Formeln, welche eine reguläre Transformation definieren,

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1' \ldots x_n') \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= f_n(x_1' \ldots x_n'), \end{aligned}$$

umgekehrt nach den Variabeln $x_1' \ldots x_n'$ aufzulösen; denn die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x_1, x_1' \ldots x_n') &= x_1 - f_1(x_1' \ldots x_n') = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F(x_n, x_1' \ldots x_n') &= x_n - f_n(x_1' \ldots x_n') = 0 \end{aligned}$$

haben die Eigenschaft, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(F_1 \ldots F_n)}{D(x_1' \ldots x_n')} = (-1)^n \frac{D(f_1 \ldots f_n)}{D(x_1 \ldots x_n)}$$

nicht verschwindet.

Wir können also die Gleichungen auflösen und erhalten:

$$x_1' = f_1'(x_1 \dots x_n)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n' = f_n'(x_1 \dots x_n).$$

Diese Formeln definieren, wie wir sehen werden, eine reguläre Transformation der Variabeln $x_1' \dots x_n'$ in die $x_1 \dots x_n$, welche wir die zur gegebenen Transformation inverse Transformation nennen wollen.

Wir müssen nun die Funktionaldeterminante dieser Transformation berechnen, was leicht gelingt mit Hilfe des bekannten Satzes, daß die Funktionaldeterminante von zwei aufeinander folgenden Transformationen gleich dem Produkt der Funktionaldeterminanten der einzelnen Transformationen ist.

Die zusammengesetzte Transformation

$$x_1'' = f_1(x_1' \dots x_n') = f_1\left(f_1'(x_1 \dots x_n) \dots f_n'(x_1 \dots x_n)\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n'' = f_n(x_1' \dots x_n') = f_n\left(f_1'(x_1 \dots x_n) \dots f_n'(x_1 \dots x_n)\right)$$

läßt sich nämlich einfacher so schreiben:

$$x_1 = x_1'' \dots x_n = x_n''$$

und hat daher die Funktionaldeterminante 1.

Demnach ist

$$\frac{D(f_1 \dots f_n)}{D(x_1' \dots x_n')} \cdot \frac{D(f_1' \dots f_n')}{D(x_1'' \dots x_n'')} = 1,$$

also sehen wir:

Die Funktionaldeterminante der zu der gegebenen Transformation inversen Transformation ist gleich dem reciproken Werte der Funktionaldeterminante der ersten Transformation, d. h. sie ist ebenfalls von Null verschieden.

Die inverse Transformation ist also in der That ebenfalls regulär.

3. **Die Dimension eines analytischen Gebildes.** Sind die Variabeln $x_1 \dots x_n$ einer Anzahl von analytischen Bedingungsgleichungen unterworfen, etwa von der Form

$$x_i = \varphi_i(t_1 \dots t_m),$$

welche die Eigenschaft haben, daß nicht alle m-reihigen Funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{i_m}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_m}}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

verschwinden, so wollen wir sagen: *Die Gleichungen definieren ein m-dimensionales analytisches Gebilde im Raume* $(R_n)\, x_1\, x_2 \ldots x_n$.

Z. B. definieren die Gleichungen

$$x_1 = \cos t_1 \cos t_2,$$
$$x_2 = \cos t_1 \sin t_2,$$
$$x_3 = \sin t_1$$

ein zweidimensionales Gebilde, weil die drei Funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} -\sin t_1 \cos t_2, & -\cos t_1 \sin t_2 \\ -\sin t_1 \sin t_2, & \cos t_1 \cos t_2 \end{vmatrix} = -\sin t_1 \cos t_1,$$

$$\begin{vmatrix} -\sin t_1 \sin t_2, & \cos t_1 \cos t_2 \\ \cos t_1 \quad , & 0 \end{vmatrix} = -\cos^2 t_1 \cos t_2,$$

$$\begin{vmatrix} \cos t_1 \quad , & 0 \\ -\sin t_1 \cos t_2, & -\cos t_1 \sin t_2 \end{vmatrix} = -\cos^2 t_1 \sin t_2$$

alle drei von Null verschieden sind.

Ein solches m-dimensionales Gebilde kann man nun noch in anderer Weise darstellen. Man kann nämlich, wenn etwa die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial t_m} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, aus den Gleichungen

$$x_1 = f_1(t_1 \ldots t_m)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_m = f_m(t_1 \ldots t_m)$$

noch die Variabeln t_i als Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_m$ bestimmen und nun die übrig bleibenden Variabeln $x_{m+1} \ldots x_n$ als Funktionen der Grössen $x_1 \ldots x_m$ darstellen. — In unserem Beispiel könnten wir folgendermaßen verfahren:

Es ist

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2 t_1,$$

$$x_3 = \sin t_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

4. **Änderung eines m-dimensionalen Gebildes bei einer regulären Transformation des R_n.** Wir können nun leicht den folgenden Satz beweisen:

Bei einer regulären Transformation bleibt die Dimension eines analytischen Gebildes ungeändert.

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns das m-dimensionale analytische Gebilde in folgender Weise dargestellt:

$$x_{m+1} = \psi_1(x_1 \ldots x_m),$$
$$x_n = \psi_{n-m}(x_1 \ldots x_m),$$

eine Annahme, die wir bei geeigneter Wahl der Bezeichnung der Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ immer machen dürfen.

Bevor wir nun die reguläre Transformation

$$x_1 = f_1(x_1' \ldots x_n')$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = f_n(x_1' \ldots x_n')$$

ausführen, wollen wir an Stelle von $x_{m+1} \ldots x_n$ die Variabeln

$$\bar{x}_{m+1} = x_{m+1} - \psi_1(x_1 \ldots x_m)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\bar{x}_n = x_n - \psi_{n-m}(x_1 \ldots x_m)$$

substituieren. Dies geht, weil die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(x_1 \ldots x_m \bar{x}_{m+1} \ldots \bar{x}_n)}{D(x_1 \ldots x_m x_{m+1} \ldots x_n)}$$

den Wert 1 hat, also von Null verschieden ist.

Die Transformationsformeln, welche entstehen, wenn man in den früheren Formeln die $\bar{x}_{m+1} \ldots \bar{x}_n$ an Stelle der $x_{m+1} \ldots x_n$ einführt, wollen wir in folgender Weise bezeichnen:

$$x_1 = \bar{f}_1(x_1' \ldots x_n')$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_m = \bar{f}_m(x_1' \ldots x_n')$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\bar{x}_n = \bar{f}_n(x_1' \ldots x_n')$$

und ihre Umkehrung so:

$$x_1' = \bar{f}_1'(x_1 \ldots \bar{x}_{m+1}, \ldots \bar{x}_n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n' = \bar{f}_n'(x_1 \ldots \bar{x}_{m+1}, \ldots \bar{x}_n).$$

Sie stellen wieder eine reguläre Transformation dar.

Bei der Transformation verwandelt sich dann das gegebene analytische Gebilde in das durch die folgenden Gleichungen dargestellte:

$$x_1' = \bar{f_1}(x_1 \ldots x_m, 0 \ldots 0)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n' = \bar{f_n}'(x_1 \ldots x_m, 0 \ldots 0).$$

Dieses Gebilde ist nun wieder m-dimensional; denn wenn alle m-reihigen Funktionaldeterminanten der $x_1' \ldots x_n'$, gebildet nach den $x_1 \ldots x_m$, verschwinden würden, so würde auch die Determinante

$$\frac{D(x_1' \ldots x_n')}{D(x_1 \ldots x_m, \bar{x}_{m+1} \ldots \bar{x}_n)}$$

verschwinden, weil sie sich als eine Summe von zweigliedrigen Produkten darstellen läßt, von denen ein jedes als Faktor eine der genannten m-reihigen Determinanten enthält. Diese Determinante kann aber nicht verschwinden, weil die Transformation regulär ist.

Hieraus folgt also der oben ausgesprochene Satz, daß die Dimension eines Gebildes ungeändert bleibt.

Selbstverständlich gilt der Satz nur im Regularitätsgebiet einer Transformation; er gilt nicht mehr notwendig für solche Wertsysteme $x_1 \ldots x_n$, für welche die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(x_1' \ldots x_n')}{D(x_1 \ldots x_n)}$$

verschwindet.

§ 4. Differentialgleichungen und ihre Lösungen.

1. **Gewöhnliche Differentialgleichungen und ihre Lösungen.** Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung $n$ter Ordnung versteht man eine analytische Gleichung von der Form

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0,$$

also eine vorgeschriebene Relation zwischen der unabhängigen Variabeln x, einer zu bestimmenden abhängigen Variabeln y und ihren n ersten Differentialquotienten. Der Name „gewöhnliche Differentialgleichung" besagt, daß sie nur *gewöhnliche* Differentialquotienten enthält.

Wir verlangen ferner von der Differentialgleichung, daß sie den Differentialquotienten

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

wirklich enthält.

Das Integrationsproblem besteht nun darin, die Lösungen anzugeben, d. h. die analytische Funktion

$$y = f(x)$$

so zu bestimmen, daß sie mit ihrem Differentialquotienten zusammen die Gleichung

$$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)\right) = 0$$

erfüllt.

Von diesen Lösungen giebt es nun wieder verschiedene Arten: Entweder kann nämlich $f(x)$ eine ganz bestimmte Funktion sein, oder es kann die Funktion $f(x)$ noch eine Konstante enthalten, welche beliebig ist. Die Funktion y ist dann von der Form

$$y = f(x, c)$$

und es stellt dann diese Funktion eine Lösung dar, unabhängig davon, welchen Wert man der Konstanten c erteilt. Die Konstante c nennt man dann eine Integrationskonstante.

Beispiel. Die Gleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = 0$$

hat unter anderen die Lösung

$$y = x,$$

aber auch die Lösung

$$y = c x.$$

c kann hier beliebig genommen werden, ist also eine Integrationskonstante.

Das Endziel des Integrationsproblems ist, alle möglichen Lösungen zu bestimmen, womöglich in der Form

$$y = f(x, c_1, c_2 \ldots),$$

wobei die Größen $c_1, c_2 \ldots$ willkürliche Integrationskonstanten sind.

Z. B. lautet für die Gleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = 0$$

die allgemeinste Lösung

$$y = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} \ldots + c_{n-1} x + c_n.$$

Die Möglichkeit der Integration werden wir in § 7 und 8 beweisen und in den späteren Kapiteln Mittel zur Integration angeben.

2. **Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.** An die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einer abhängigen Variabeln schließen sich als Verallgemeinerung die Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren zu bestimmenden abhängigen Veränderlichen, d. h. Gleichungen von der Form

$$f_1(y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n', x) = 0,$$
$$f_2(y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n', x) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n(y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n', x) = 0.$$

Auf diese Form lassen sich auch die gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit einer **einzigen** abhängigen Veränderlichen bringen durch eine sehr einfache Substitution.

Setzt man nämlich

$$y_1 = \frac{dy'}{dx}, \quad y_2 = \frac{dy_1'}{dx} \cdots y_{n-1} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

so verwandelt sich die Differentialgleichung

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

in das System

$$F\left(x, y, y_1 \cdots y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0,$$
$$y_1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$
$$y_2 - \frac{dy_1}{dx} = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_{n-1} - \frac{dy_{n-2}}{dx} = 0,$$

welches zwar mehr als eine abhängige Veränderliche enthält, aber nur lauter **erste** Differentialquotienten.

Bei solchen Systemen ergiebt sich das folgende Integrationsproblem: *die abhängigen Veränderlichen* $y_1 \ldots y_n$ *als Funktionen von* x (*und von Integrationskonstanten*) *so zu bestimmen, daß die Funktionen zusammen mit ihren ersten Differentialquotienten das vorgeschriebene System von Differentialgleichungen erfüllen.*

3. **Aufgelöste Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und homogene lineare partielle Differentialgleichungen.** Von besonders einfacher Form sind die nach den Differentialquotienten aufgelösten Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, d. h. die Systeme von der Gestalt:

(1)
$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1 \cdots y_n, x)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(y_1 \cdots y_n, x).$$

Diese Systeme lassen sich auch ersetzen durch partielle Differentialgleichungen von besonders einfacher Form.

Es giebt nämlich, wie wir in § 9, 2 sehen werden, ein System von Lösungen

$$y_1 = \varphi_1(x, c_1 \dots c_n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_n = \varphi_n(x, c_1 \dots c_n)$$

welche man nach den Konstanten c_i auflösen kann. Diese Auflösungen seien:

$$\psi_1(y_1 \dots y_n, x) = c_1 \dots \psi_n(y_1 \dots y_n, x) = c_n$$

Eine solche Funktion ψ muß dann die Bedingung erfüllen

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(y_1 \dots y_n, x) \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(y_1 \dots y_n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

d. h. eine Gleichung, welche in den nach $y_1 \dots y_n$ und x genommenen Differentialquotienten der Funktion ψ linear und homogen ist und daher eine homogene lineare partielle Differentialgleichung genannt wird. (Man nennt die Funktion ψ eine Lösung der Differentialgleichung.)

Wir wollen eine solche Gleichung einfach mit

$$W(\psi) = 0$$

bezeichnen.

Kennt man andererseits von einer solchen partiellen Differentialgleichung n Lösungen

$$\psi_1(y_1 \dots y_n, x) = c_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\psi_n(y_1 \dots y_n, x) = c_n,$$

welche sich nach den Variabeln y auflösen lassen, so müssen die durch Auflösung gefundenen Funktionen wieder das gegebene System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen. Aus den n Paaren von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} f_1 \quad \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} f_n \quad + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{dx} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad i = 1 \dots n$$

folgt nämlich

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}\left(f_1 - \frac{dy_1}{dx}\right) \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}\left(f_n - \frac{dy_n}{dx}\right) = 0 \quad i = 1 \dots n,$$

und da die Determinante

$$\frac{D(\psi_1 \ldots \psi_n)}{D(y_1 \ldots y_n)}$$

nicht verschwindet (§ 2, 3), so muß

$$f_k = \frac{dy_k}{dx} \quad (k = 1 \ldots n)$$

sein. Hieraus folgt also:

Die beiden Probleme: Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(y_1 \ldots y_n, x) \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(y_1 \ldots y_n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

und Bestimmung der Lösungen des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung (1) *stehen in reciprokem Zusammenhang.*

Aus der Form der hier zuerst genannten linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung folgt ferner:

Ist ψ_1 *eine Lösung und* ψ_2 *ebenfalls, so ist auch* $\chi(\psi_1, \psi_2)$ *eine Lösung; denn es ist*

$$W(\chi) = W(\psi_1) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \psi_1} + W(\psi_2) \frac{\partial \chi}{\partial \psi_2} = 0.$$

4. **Partielle Differentialgleichungen und Systeme von solchen Gleichungen.** Die in Nr. 3 erwähnte Form ist nur eine ganz spezielle Form einer partiellen Differentialgleichung. Die allgemeinste Form würde folgende sein:

$$F\left(x_1 \ldots x_n, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \ldots \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2} \ldots \frac{\partial^m \psi}{\partial x_1^m} \ldots\right) = 0,$$

und es ergiebt sich dann das Problem: Vorgeschrieben ist eine Gleichung zwischen den unabhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, der abhängigen Veränderlichen ψ und ihren partiellen Differentialquotienten bis zur $m$ten Ordnung mitgerechnet (d. h. die Gleichung soll mindestens einen Differentialquotienten von $m$ter Ordnung, aber keinen von höherer Ordnung enthalten). Es soll eine Funktion bestimmt werden, welche diese partielle Differentialgleichung $m$ter Ordnung erfüllt.

Analog, wie wir Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen kennen gelernt haben, kann man natürlich auch Systeme von partiellen Differentialgleichungen aufstellen, welche mehrere unabhängige Veränderliche und mehrere abhängige Veränderliche mit ihren Differentialquotienten enthalten. Ordnung eines solchen Systems nennt man dann die Ordnung des höchsten in den Gleichungen des Systems vorkommenden Differentialquotienten irgend einer zu bestimmenden Variabeln.

§ 5. Die Integration von vollständigen Differentialen.

1. **Das vollständige Differential einer Funktion.** Gegeben sei eine analytische Funktion

$$f(x_1 \ldots x_n)$$

der n unabhängigen Variabeln $x_1 \ldots x_n$. Wir wollen die ersten partiellen Differentialquotienten der Funktion f in folgender Weise bezeichnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = X_1(x_1 \ldots x_n)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = X_n(x_1 \ldots x_n).$$

Die Funktionen X_i genügen dann den folgenden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

Wir wollen ferner den Ausdruck

$$X_1\,d x_1 \ldots + X_n\,d x_n$$

nennen „das vollständige Differential der Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$". Dieser Name hat die folgende Bedeutung: Werden die Grössen $x_1 \ldots x_n$, die als Argumente der Funktion f angenommen sind, selbst wieder als Funktionen einer einzigen Veränderlichen t betrachtet, so dient der hingeschriebene Ausdruck direkt zur Darstellung der vollständigen Differentialquotienten der Funktion f nach der Variabeln t; denn es ist

$$\frac{df}{dt} = X_1 \frac{dx_1}{dt} + X_2 \frac{dx_1}{dt} \cdots + X_n \frac{dy_n}{dt}.$$

2. **Integration eines vollständigen Differentiales durch aufeinanderfolgende Quadraturen.** Ist der Ausdruck

$$X_1\,d x_1 \ldots + X_n\,d x_n$$

das vollständige Differential der Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$, so erfüllen die Funktionen X_i die Bedingungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

Man kann sich nun aber auch die Frage stellen: *Wann ist der Ausdruck*

$$X_1\,d x_1 \ldots + X_n\,d x_n$$

das vollständige Differential einer Funktion? Wie bestimmt man ferner, wenn dies der Fall ist, die Funktion?

Wir können sofort ein System von Bedingungsgleichungen angeben, welches die Funktionen X_i erfüllen müssen.

Da eine analytische Funktion die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

erfüllt, so müssen die Grössen X_i jedenfalls die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

Wir wollen zeigen, daß diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, indem wir durch aufeinander folgende Quadraturen direkt eine Funktion konstruieren, welche die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = X_i(x_1 \dots x_n) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

erfüllt.

Die Funktion ist die folgende:

$$f(x_1 \dots x_n) = u_1 + u_2 \dots + u_n,$$

wo

$$u_i = \int\limits_{a_i}^{x_i} \left(X_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^{i-1}{}_k u_k \right) d x_i$$

ist. (Vorausgesetzt ist, daß die Funktionen X_i in der Umgebung der Stelle $x_k = a_k$ und im ganzen Integrationsgebiet regulär sind.)

Hier erfüllen die Funktionen u_i gewisse Differentialgleichungen, die wir ableiten wollen.

Zunächst ist

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{a_2}^{x_2} \left(X_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \int\limits_{a_1}^{x_1} X_1 \, d x_1 \right) d x_2$$

$$= \int\limits_{a_2}^{x_2} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) d x_2 = 0.$$

Durch den Schluß von $m - 1$ auf m gewinnen wir hieraus die allgemeine Beziehung:

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2 \dots m - 1).$$

Nehmen wir nämlich an, daß der Satz bewiesen ist für die Funktionen $u_1, u_2 \dots u_{m-1}$, so können wir den Differentialquotienten

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_j} = \int_{a_m}^{x_m} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} \sum_1^{m-1} {}_k\, u_k \right) d x_m$$

vereinfachen. Wir brauchen nämlich in der Summe, die unter dem Integralzeichen steht, nur diejenigen Funktionen u_k zu berücksichtigen, für welche k kleiner ist als $j+1$. Die Differentialquotienten, welche außerdem noch in der Summe auftreten, verschwinden alle.

Auf diese Weise erhalten wir

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_j} = \int_{a_m}^{x_m} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} \sum_1^{j} {}_k\, u_k \right) d x_m$$

$$= \int_{a_m}^{x_m} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} \left(\sum_1^{j-1} {}_k\, u_k \right) - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_m} \right) d x_m,$$

oder, da

$$u_j = \int_{a_j}^{x_j} \left(X_j - \sum_1^{j-1} {}_k\, u_k \right) d x_j,$$

also

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_m} = \frac{\partial X_j}{\partial x_m} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} \sum_1^{j-1} {}_k\, u_k,$$

ist

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_j} = \int_{a_m}^{x_m} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_m} \right) d x_m = 0.$$

Aus dieser Eigenschaft der Funktionen u folgt aber mit Leichtigkeit die Berechnung der Differentialquotienten von der Funktion f. Es ist nämlich dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} = \sum_1^{n} {}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_m} = \sum_1^{m} {}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_m} = \sum_1^{m-1} {}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_m}$$

$$= \sum_1^{m-1} {}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + X_m - \sum_1^{m-1} {}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_m} = X_m.$$

Die konstruierte Funktion f ist also eine in der Umgebung der Stelle $x_i = a_i$ reguläre analytische Funktion, welche die vorgeschriebenen Differentialquotienten hat.

3. **Eindeutige Bestimmung der Funktion f.** Wegen des unsymmetrischen Verfahrens, das zur Konstruktion der Funktion f benutzt wurde, könnte es zweifelhaft erscheinen, ob die konstruierte Funktion eindeutig bestimmt ist, und ob nicht etwa ein anderes Verfahren, bei dem die Variabeln x_i in anderer Reihenfolge auftreten, auf eine ganz andere Funktion geführt hätte.

Diesem Einwand ist leicht zu erwidern: Da nämlich an der Stelle $x_i = a_i$ die verschiedenen Funktionen den Wert 0 annehmen, und da an dieser Stelle infolge des angegebenen Verfahrens nicht nur die ersten, sondern alle folgenden Differentialquotienten einen ganz bestimmten Wert haben, so ist die Funktion im ganzen Regularitätsgebiet vollkommen eindeutig bestimmt.

4. **Beispiele.** 1. Der Ausdruck

$$X\,dx + Y\,dy = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - x\right)dy$$

ist ein vollständiges Differential, denn es ist

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 1$$

und ebenso

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-xy}{(1+x^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\,.$$

Die beiden Funktionen sind für $x = 0$, $y = 0$ regulär, und man kann daher nach dem angegebenen Verfahren eine Funktion konstruieren, welche für $x = 0$, $y = 0$ den Wert Null annimmt. Wir erhalten

$$u_1 = \int_0^x \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - y\right)dx = \sqrt{1+x^2+y^2} - xy - \sqrt{1+y^2},$$

$$u_2 = \int_0^y \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - x - \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + x + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy,$$

d. h.

$$u_2 = \sqrt{1+y^2} - 1$$

und

$$f = u_1 + u_2 = \sqrt{1+x^2+y^2} - xy - 1\,.$$

Hätte man das Verfahren in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt, so wäre gekommen

$$v_1 = \int_0^y \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - x\right) dy = \sqrt{1+x^2+y^2} - xy - \sqrt{1+x^2},$$

$$v_2 = \int_0^x \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - y - \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + y + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

$$= \sqrt{1+x^2} - 1$$

und $$f = v_1 + v_2 = \sqrt{1+x^2+y^2} - xy - 1 .$$

Das Resultat ist also wieder dasselbe, entsprechend dem allgemeinen Satz.

2. Der Ausdruck

$$y\,dx - x\,dy$$

ist **kein** vollständiges Differential, denn es ist

$$\frac{\partial y}{\partial y} = +1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 .$$

Hier würde man erhalten

$$u_1 = \int_0^x y\,dx = xy,$$

$$u_2 = \int_0^y (-x - x)\,dy = -2xy,$$

also $$u_1 + u_2 = -xy .$$

Dagegen liefert das andere Verfahren folgendes Resultat:

$$v_1 = \int_0^y -x\,dy = -xy,$$

$$v_2 = \int_0^x (y + y)\,dx = +2xy,$$

also $$v_1 + v_2 = xy,$$

d. h. einen Wert, der von dem vorigen ganz verschieden ist.

§ 6. Der Calcul des limites.

1. **Die Aufgabe des Calcul des limites.** Die Methode des *Calcul des limites,* welche später beim Beweis der Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen gebraucht wird, beruht auf folgendem

Gedankengang: Man kann die Konvergenz einer Reihenentwickelung beweisen, indem man zeigt, daß ihre Koeffizienten dem absoluten Betrage nach kleiner sind als die Koeffizienten einer anderen Reihenentwickelung, welche konvergiert.

Diese Methode ist in der Theorie der Differentialgleichungen deswegen von besonderer Bedeutung, weil es gelingt, die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung in eine Reihe zu entwickeln, deren Koeffizienten kleiner sind, als die für die Reihenentwickelung einer bestimmten unmittelbar angebbaren Lösung einer gewissen einfacheren Differentialgleichung, welche sich aus der gegebenen ableiten läßt.

2. **Der Fundamentalsatz.** Der Satz, welcher die Grundlage des *Calcul des limites* bildet, lautet so:

Wenn die in der Umgebung von $x = 0$ reguläre analytische Funktion

$$y = f(x)$$

für $|x| < a$ den Wert M nicht übersteigt, so besteht die Relation

$$\left|\frac{d^k f(x)}{d x^k}\right|_{x=0} < \frac{d^k F}{d x^k}_{x=0},$$

wo die Funktion F die Bedeutung hat

$$F = \frac{M}{1 - \frac{x}{a}}.$$

Der Beweis wird geführt mit Hilfe der Formel:

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_a \frac{f(x)}{x^{k+1}}\,dx,$$ [1]

in der das Integral über die Peripherie eines Kreises vom Radius a zu erstrecken ist, der in der Ebene der komplexen x um den Nullpunkt als Mittelpunkt konstruiert ist.

Dieses Integral ist dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{Mk!}{a^k}.$$

Andererseits ist

$$F^{(k)}(0) = \frac{M.k!}{a^k},$$

und hieraus folgt der aufgestellte Satz.

3. **Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen.** Der Satz läßt sich leicht verallgemeinern zu dem folgenden Satz:

[1] Burkhardt, Analytische Funktionen, § 46.

Es sei $f(x, y_1 \dots y_m)$ eine analytische Funktion der Argumente $x y_1 \dots y_m$, welche die Bedingung

$$|f(x, y_1 \dots y_m)| \leqq M$$

erfüllt, so lange

$$|x| < a \quad \textit{und} \quad |y_i| < b.$$

Dann ist

$$\left| \frac{\partial f^{k+k_1+k_2 \dots +k_m}(x, y_1 \dots y_m)}{\partial x^k \, \partial y_1^{k_1} \dots \partial y_m^{k_m}} \right|_{x=y_i=0} < \left(\frac{\partial F^{k+k_1 \dots +k_m}(x, y_1 \dots y_m)}{\partial x^k \, \partial y^{k_1} \dots \partial y_m^{k_m}} \right)_{x=y_i=0},$$

wobei unter F die Funktion

$$F(x, y_1 \dots y_m) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y_1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{y_m}{b}\right)}$$

zu verstehen ist.

Der Beweis wird ganz ähnlich wie in 2 geführt, nämlich mit Hilfe einer Formel, welche den Differentialquotienten einer Funktion von mehreren Veränderlichen durch ein bestimmtes Integral ausdrückt. Die Formel lautet:

$$\left(\frac{\partial f^{k+k_1 \dots +k_m}(x, y_1 \dots y_m)}{\partial x^k \, \partial y_1^{k_1} \dots \partial y_m^{k_m}} \right)$$

$$= \frac{k!\, k_1! \dots k_m!}{(2\pi i)^{m+1}} \int \frac{dx}{x^{k+1}} \cdot \int \frac{dy_1}{y_1^{k_1+1}} \dots \int \frac{dy_m}{y_m^{k_m+1}} f(x, y_1 \dots y_m)$$

und es sind die Integrale zu erstrecken über die Peripherien der Kreise mit den Radien $|x| = a$ und $|y_i| = b$.

Aus der Formel folgt, daß der absolute Betrag des auf der linken Seite stehenden Differentialquotienten kleiner ist als

$$\frac{k!\, k_1! \dots k_m!}{a^k \, b^{k_1 \dots +k_m}} \cdot M.$$

Andererseits ist

$$\left(\frac{\partial F^{k+k_1 \dots +k_m}(x, y_1 \dots y_m)}{\partial x^k \, \partial y_1^{k_1} \dots \partial y_m^{k_n}} \right)_{x=y_1 \dots y_n=0} = \frac{M \cdot k!\, k_1! \dots k_m!}{a^k \, b^{k_1 \dots +k_m}}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt aber der oben ausgesprochene Satz.

4. **Anwendung einer anderen Vergleichsfunktion.** Bei dem Existenzbeweis der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen werden wir von einer anderen, einfacheren Vergleichsfunktion Gebrauch machen.

Wenn die Funktion

$$f(x_1 \ldots x_n)$$

für

$$|x_i| < a$$

die Bedingung

$$|f| < M$$

erfüllt, so wollen wir als Vergleichungsfunktion

$$\Phi = \frac{M}{1 - \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{a}}$$

nehmen. Es ist dann

$$\left(\frac{\partial^{k_1 + k_2 \ldots + k_n} \Phi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)_{x_1 = x_2 \ldots = 0} = \frac{M . (k_1 + k_2 \ldots + k_n)!}{a^{k_1 + k_2 \ldots + k_n}},$$

während für die frühere Funktion

$$F = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)\left(1 - \frac{x_2}{a}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{a}\right)}$$

der betreffende Differentialquotient den kleineren Wert

$$\frac{M . k_1! \ldots k_n!}{a^{k_1 \ldots + k_n}}$$

hat.

Hieraus folgt, daß die Funktion Φ die Ungleichheiten, welche zwischen den Differentialquotienten von F und denen von f bestehen, *a fortiori* erfüllt.

5. **Folgerung für Reihenvergleichungen.** Hieraus ergeben sich nun wichtige Folgerungen für die Vergleichung von zwei Reihen, welche beide nach demselben Gesetz fortschreitende Koeffizienten haben, die selbst ganze Funktionen der Differentialquotienten von f, resp. von der Vergleichungsfunktion sind, und positive ganze Zahlen als Faktoren dieser Differentialquotienten haben:

Konstruiert man aus der Vergleichsfunktion einen solchen Koeffizienten, so erhält man eine positive Zahl, welche größer ist als der absolute Betrag des Koeffizienten, der mit Hilfe der Funktion f selbst konstruiert wird.

Hieraus folgt: *Konvergiert die erste — mit Hilfe der Vergleichungsfunktion konstruierte — Reihe, so konvergiert auch die zweite, mit Hilfe der Funktion f selbst konstruierte Reihe.*

§ 7. Die Existenz der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und von Systemen solcher Gleichungen.

1. **Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in aufgelöster Form.** Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x,y),$$

wo $f(x,y)$ eine in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ analytische Funktion ihrer beiden Argumente ist, die für $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| = b$ dem absoluten Betrage nach kleiner als M ist.

Wir können übrigens $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ setzen, indem wir eine geeignete Substitution vornehmen.

Unter diesen Voraussetzungen giebt es, wie wir beweisen wollen eine analytische Funktion

$$y = \varphi(x),$$

welche die Differentialgleichung erfüllt und für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annimmt.

Wir werden beim Beweise dieses Satzes die Methoden des *Calcul des limites* anwenden.

2. **Die Hilfsgleichung und ihre Integration.** Wir ersetzen nämlich die zu integrierende Gleichung durch die folgende Gleichung:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{\eta}{b}\right)} = F(x, \eta).$$

Diese Gleichung kann man sofort integrieren.

Es folgt nämlich aus der Gleichung:

$$\left(1 - \frac{\eta}{b}\right)\frac{d\eta}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)},$$

d. h.

$$\eta - \frac{\eta^2}{2b} = -Ma\log\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

oder

$$\eta = b\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Ma}{b}\log\left(1 - \frac{x}{a}\right)}\right).$$

Die Lösung dieser Hilfsgleichung ist eine analytische Funktion von x, welche regulär ist in dem Gebiet

$$|x| < \varrho,$$

wo

$$\varrho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right)$$

ist.

3. Reihenentwickelung für die Lösung und Konvergenzgebiet derselben. Wenn wir direkt eine Reihenentwickelung für die Lösung der gegebenen Differentialgleichung aufstellen wollen, so können wir dies leisten, indem wir die aufeinander folgenden Differentialquotienten an der Stelle Null berechnen und dieselben in die MACLAURIN'sche Entwickelung einsetzen.

Diese Differentialquotienten werden berechnet mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$y_0' = f(0,0),$$
$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\x=0}} y_0'$$

u. s. f.

Genau so hätte man die Reihentwickelung der Lösung von

$$\frac{d\eta}{dx} = F(x,\eta)$$

herstellen können mit denselben Rekursionsformeln und wäre dann zu der oben direkt berechneten Lösung η gelangt.

Da nun aber

$$\left| \frac{\partial^{(i+k)} f(x,y)}{\partial x^i \, \partial y^k} \right|_{\substack{x=0\\y=0}} < \left(\frac{\partial^{(i+k)} F(x,y)}{\partial x^i \, \partial y^k} \right)_{\substack{x=0\\y=0}}$$

ist (§ 6, 3), so folgt (§ 6, 5), daß die Grössen y_0', y_0'' u. s. f. dem absoluten Betrage nach jedenfalls nicht größer sind als die entsprechenden Differentialquotienten von η.

Die gefundene Reihenentwickelung konvergiert also jedenfalls mindestens in demselben Gebiete, wie die Reihenentwickelung für η, sie stellt aber außerdem eine Lösung der Differentialgleichung dar, da für $x = 0$, $y = 0$ die beiden Funktionen

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad f(x,y)$$

mit allen ihren Differentialquotienten übereinstimmen.

Hiermit ist also der folgende Satz bewiesen:

Wenn die rechte Seite der Differentialgleichung

$$y' = f(x,y)$$

eine für $x = x_0$ und $y = y_0$ reguläre analytische Funktion ist und regulär bleibt, so lange

$$|x - x_0| < a \quad \textit{und} \quad |y - y_0| < b,$$

wenn außerdem in diesem Gebiete die Funktion f ihrem absoluten Be-

trage nach kleiner als M ist, dann giebt es eine und nur eine für $x = x_0$ *analytische Funktion*

$$y - y_0 = \varphi(x - x_0),$$

welche die Differentialgleichung erfüllt und für $x = x_0$ *den Wert* $y = y_0$ *annimmt. Der Radius des Konvergenzkreises für die Entwickelung dieser Funktion ist jedenfalls nicht kleiner als die Größe*

$$\varrho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right).$$

4. **Existenzbeweis für die Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.** Für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält man den folgenden Satz:

Es seien in den m Differentialgleichungen:

$$y_1' = f_1(x, y_1 \dots y_m),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_m' = f_m(x, y_1 \dots y_m)$$

die f_i *reguläre analytische Funktionen ihrer Argumente, so lange* $|x - a| < \alpha$ *und* $|y_i - b_i| < \beta$ *ist. Es sei außerdem M der größte Wert, den der absolute Betrag irgend einer dieser Funktionen im Regularitätsgebiet erreicht. Dann giebt es ein bestimmtes System von analytischen Funktionen*

$$y_i = b_i + \varphi_i(x - a),$$

welche die Differentialgleichungen erfüllen, und deren Konvergenzkreise Radien haben, welche jedenfalls nicht kleiner sind als

$$\varrho = \alpha\left(1 - e^{-\frac{\beta}{(m+1)\alpha M}}\right).$$

Der Beweis wird ganz analog geführt wie der frühere. Wir nehmen an, es sei $a = b_1 \dots b_m = 0$, und dann ersetzen wir die Differentialgleichungen durch das folgende einfachere System:

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{\eta_1}{\beta}\right)\cdots\left(1 - \frac{\eta_m}{\beta}\right)} = F(x, \eta_1 \dots \eta_m).$$

Nach § 6, 3 ist dann

$$\left|\frac{\partial f_i^{k+k_1\dots+k_m}(x, y_1 \dots y_m)}{\partial x^k \, \partial y_1^{k_1} \cdots \partial y_m^{k_m}}\right|_{x=y_i=0} \leqq \left(\frac{\partial F^{k+k_1\dots+k_m}(x, \eta_1 \dots \eta_m)}{\partial x^k \, \partial \eta_1^{k_1} \cdots \partial \eta_m^{k_m}}\right)_{x=\eta_i=0}.$$

Daher konvergieren die Reihenentwickelungen, die wir für die y_i durch Berechnung der Differentialquotienten und Aufstellung der MACLAURIN'schen Reihe erhalten, jedenfalls in demselben Gebiete, wie die für die Funktionen η_i (§ 6, 5).

Die Gleichungen für die η_i lassen sich aber leicht integrieren, denn die η_i sind alle unter einander identisch, da für $x = 0$, $\eta_i = 0$ alle ihre Differentialquotienten übereinstimmen.

Wir haben also einfach die Gleichung

$$\left(1 - \frac{\eta}{\beta}\right)^m \frac{d\eta}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)}$$

zu integrieren und erhalten

$$\eta = \beta\left(1 - \sqrt[m+1]{1 + \frac{\alpha(m+1)}{\beta} M \log\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)}\right).$$

Diese Reihe konvergiert jedenfalls für

$$|x| < \alpha\left(1 - e^{\frac{-\beta}{\alpha(m+1)M}}\right).$$

Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

5. **Beispiele.**

1. Es sei gegeben die Differentialgleichung

$$y' - xy = 0.$$

Die Funktion

$$f(x, y) = xy$$

ist regulär für $x = 0, y = 0$. Es muß daher eine analytische Lösung geben, die für $x = 0$ den Wert $y = 0$ annimmt.

Wir kommen in der That zur Berechnung einer Reihenentwickelung

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

welche die Differentialgleichung erfüllt, die Rekursionsformeln

$$(n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0.$$

Hieraus folgt

$$a_2 = a_4 \ldots = a_{2n} = 0,$$

ferner, da $a_1 = 0$ ist,

$$a_1 = a_3 \ldots = a_{2n+1} = 0.$$

Also bekommen wir als gesuchte Lösung einfach

$$y = 0.$$

Die erhaltene Funktion ist in der That regulär, entsprechend den allgemeinen Sätzen.

2. Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y(1-x) - x}{x^2}.$$

Die Funktion $f(x, y) = \frac{y(1-x) - x}{x^2}$ ist für $x = 0$, $y = 0$ nicht regulär.

Wir wollen nun sehen, was für eine Reihenentwickelung man erhält, wenn man die Koeffizienten berechnet und verlangt, daß die Funktion für $x = 0$ verschwindet.

Wir setzen also

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

und erhalten die Formeln:

$$a_1 = 1,$$

$$a_{n-1}(n-1) - a_n + a_{n-1} = 0 \quad (n > 1),$$

aus denen folgt:

$$a_n = n \,.\, a_{n-1},$$

d. h. es ergiebt sich

$$y = x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \dots + n!\,x^n + \dots .$$

Diese Reihenentwickelung hat gar keine Bedeutung, weil sie divergiert. Wir durften aber auch gar keine konvergierende Entwickelung erwarten, da die Voraussetzung, daß $f(x, y)$ regulär ist, nicht erfüllt ist.

3. Die Funktion

$$f(x, y) = \frac{y}{x}$$

ist für $x = 0$, $y = 0$ nicht regulär. Wenn man nun die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x}$$

zu integrieren sucht durch eine Potenzreihe

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots ,$$

so bekommt man die Rekursionsformeln

$$a_1 - a_1 = 0,$$

$$2 a_2 - a_2 = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$n a_n - a_n = 0,$$

Man erhält also die Lösung

$$y = a x .$$

Diese Lösung ist regulär, obwohl die Funktion $f(x, y) = \frac{y}{x}$ im Punkte $x = y = 0$ nicht regulär ist. Dagegen ist die erhaltene Lösung nicht vollkommen bestimmt; die Konstante a kann ganz beliebig gewählt werden.

§ 8. Weitere Ergänzungen und Folgerungen aus den Existenzbeweisen.

1. Differentialgleichungen erster Ordnung in impliciter Form. Die Sätze über implicite Funktionen gestatten es, das Existenztheorem auf den Fall zu erweitern, wo die Gleichung nicht in aufgelöster Form gegeben ist, sondern der Differentialquotient implicite bestimmt ist, etwa durch die Gleichung

$$\varphi(x, y, y') = 0 .$$

Ist $\varphi(x, y, y')$ eine analytische Funktion, welche für $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$ verschwindet, und ist außerdem für diese Werte der Argumente der Differentialquotient nach y' von Null verschieden, so kann man nach y' auflösen (§ 2, 1) und erhält

$$y' = y_0' + f(x - x_0, y - y_0),$$

wo die Funktion $f(x - x_0, y - y_0)$ analytisch ist. Auf diese Differentialgleichung kann man dann das frühere Existenztheorem anwenden.

Wir haben also den Satz:

Ist $\varphi(x y y')$ eine in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$, $y = \beta$, $y' = \gamma$, an der die Funktion verschwindet, eine reguläre analytische Funktion der Argumente x, y, y', während $\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$ von Null verschieden ist, so giebt es eine ganz bestimmte analytische Funktion

$$y = \beta + f(x - \alpha),$$

welche die Differentialgleichnng erfüllt und für welche

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{y=\beta \\ x=\alpha}} = \gamma$$

ist.

Verschwindet aber der erste Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$ an der betreffenden Stelle, so kann man (§ 2, 1) wenigstens in der Nähe der Stelle $\alpha \beta \gamma$ Wertsysteme $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ nachweisen, in deren Umgebung man die analytische Gleichung $\varphi(x y y') = 0$ auflösen kann, und in deren Umgebung sich also der Existenzbeweis durchführen läßt.

2. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung in impliciter Form. Ganz analog läßt sich das Existenztheorem für Systeme von aufgelösten Differentialgleichungen erster Ordnung auf den Fall erweitern, wo die Differentialquotienten der zu bestimmenden Funktionen implicite gegeben sind. Der betreffende Satz lautet:

Sind die Funktionen

$$\varphi_1 (x, y_1 \cdots y_m, y_1' \cdots y_m')$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_m (x, y_1 \cdots y_m, y_1' \cdots y_m')$$

in der Umgebung eines bestimmten Wertsystems $x = a$, $y_i = \beta_i$, $y_i' = \gamma_i$ *regulär und verschwinden sie für diese Argumente, während die Funktionaldeterminante*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m'} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m'} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so giebt es ein bestimmtes System von analytischen Funktionen

$$y_i = \beta_i + f_i(x - \alpha),$$

welche die Differentialgleichungen $\varphi_i = 0$, $i = 1 \ldots m$ *erfüllen und sich für* $x = \alpha$ *auf die Werte*

$$y_i = \beta_i$$

reduzieren. Die Differentialquotienten dieser Funktionen nehmen für $x = \alpha$ *die Werte* $y_i' = \gamma_i$ *an.*

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich einfach daraus, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen $\varphi_i = 0$ sich nach den Differentialquotienten auflösen lassen (§ 2, 3) und daher das in § 7, 4 bewiesene Existenztheorem sich anwenden läßt.

3. **Die Frage nach dem analytischen Verhalten der Lösungen.** Die bisherigen Existenzbeweise lehrten folgendes: Unter gewissen Voraussetzungen gab es eine für die betreffenden Anfangswerte analytische Funktion, welche eine Lösung darstellte. Es ergiebt sich nun aber die Frage: Giebt es nicht vielleicht außer diesen Lösungen noch andere, welche in dem betreffenden Punkt aufhören regulär zu sein, obwohl die Funktion, welche den Differentialquotienten darstellt, regulär ist? Daß diese Frage wichtig ist, lehrt uns das folgende Beispiel.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{3}{2} \frac{y}{x}$$

hat die Lösung

$$y = c x^{\frac{3}{2}}.$$

Für $x = 0$ ist y analytisch dann, wenn $c = 0$ ist, denn $y = 0$ ist ja

eine analytische Funktion. Außer dieser analytischen Lösung giebt es aber noch andere, z. B.

$$y = x^{\frac{3}{2}},$$

welche auch für $x = 0$ *den Wert* $y = 0$ *annehmen*, aber für $x = 0$ nicht mehr *analytisch* sind.

In diesem Beispiel ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

für $x = y = 0$ nicht mehr analytisch.

Man könnte aber fragen: *Kann ein solcher Fall, nämlich daß außer der analytischen Lösung noch andere existieren, die zwar bis in beliebige Nähe von dem betrachteten Punkt analytisch sind, aber im Punkte selbst aufhören, analytisch zu sein, nicht auch dann eintreten, wenn* $f(x,y)$ *in dem betrachteten Punkte analytisch ist?* Der Beweis in § 7, 3 schließt jedenfalls diese Möglichkeit nicht aus, denn er beruht auf der Annahme, daß die Lösung in dem betreffenden Punkte *analytisch* ist.

4. **Erledigung des Problems durch eine Transformation.** Man kann aber die Frage leicht entscheiden, indem man die Differentialgleichung transformiert.

Es sei also gegeben die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

wo die Funktion $f(x,y)$ analytisch ist für $x = x_0$, $y = y_0$. Die Lösung, welche für $x = x_0$ analytisch ist und den Wert $y = y_0$ annimmt, und deren Existenz in § 7, 3 bewiesen ist, wollen wir bezeichnen mit $\psi(x, x_0, y_0)$.

Jetzt machen wir die Substitution

$$u = \psi(x_0, x, y).$$

Durch diese Substitution verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung in

$$\frac{du}{dx} = 0;$$

denn die Gleichung

$$u = \psi(x_0, x, y)$$

ist die Auflösung der Gleichung

$$y = \psi(x, x_0, y_0)$$

nach u. Hieraus folgt aber, daß u konstant ist, sobald man darin für y eine Lösung der Differentialgleichung einsetzt, d. h. aber, daß

die transformierte Differentialgleichung die Form $\frac{du}{dx} = 0$ hat. Diese Differentialgleichung hat nur die Lösung $u =$ constans, welche überall regulär ist, und daraus folgt dann durch die inverse Transformation

$$y = \psi(x, x_0, u),$$

daß es außer der für $x = x_0$, $y = y_0$ regulären analytischen Lösung keine andere giebt, die bis zum Punkte $x = x_0$, $y = y_0$ hin regulär ist.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = x$$

hat die Lösung

$$y = y_0 + \frac{x^2 - x_0^2}{2}.$$

Hier haben wir dann die Transformation anzuwenden

$$u = y + \frac{x_0^2 - x^2}{2}.$$

Dadurch verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - x = 0,$$

von der es nur Lösungen von der Form

$$u = c$$

giebt. Von der ursprünglichen Differentialgleichung giebt es außer

$$y = y_0 + \frac{x^2 - x_0^2}{2}$$

also weiter keine Lösung, die bis zum Punkt $x = x_0$, $y = y_0$ analytisch ist und in diesem Punkt den Wert y_0 annimmt.

5. **Erledigung des Problems für Systeme von Differentialgleichungen.** Ist ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1 \cdots y_m),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1 \cdots y_m),$$

wo die Funktionen f sich regulär verhalten in der Umgebung eines Wertsystems

$$x = \alpha, \qquad y_i = \beta_i,$$

so kann man fragen: Giebt es außer den für $x = \alpha$ analytischen Lösungen

$$y_i = \psi_i(x, \alpha, \beta_1 \ldots \beta_m),$$

welche für $x = \alpha$ die Werte $y_i = \beta_i$ annehmen, vielleicht noch andere Lösungen, die bis in beliebige Nähe des Punktes sich regulär verhalten, aber in dem Punkte selbst aufhören regulär zu sein?

Die Antwort auf diese Frage findet man, indem man das System von Differentialgleichungen transformiert mit Hilfe der Formeln

$$u_i = \psi_i(\alpha, x, y_1 \dots y_m), \quad i = 1 \dots m,$$

welche die Auflösungen der Gleichungen nach den Größen β_i sind. Hierdurch erhält man dann die Differentialgleichungen

$$\frac{d u_i}{d x} = 0, \quad i = 1, 2 \dots m,$$

von denen es außer

$$u_i = c_i$$

keine anderen Lösungen giebt. Indem man nun wieder die inverse Transformation

$$y_i = \psi_i(x, \alpha, u_1 \dots u_m)$$

anwendet, gelangt man zu dem Ergebnis, *daß es außer den für* $x = \alpha$, $y_i = \beta_i$ *selbst analytischen Lösungen weiter keine giebt, die bis in beliebige Nähe dieses Wertsystems regulär bleiben.*

§ 9. Integrationskonstanten und Anfangsbedingungen.

1. **Die Hauptlösungen.** Unter den Hauptlösungen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung versteht man die Funktionen

$$y_i = \psi_i(x, \alpha, \beta_1 \dots \beta_m), \quad i = 1 \dots m,$$

welche die Differentialgleichungen erfüllen und sich für

$$x = \alpha \quad \text{auf} \quad y_i = \beta_i$$

reduzieren.

Die Größen β_i nennen wir die kanonischen Integrationskonstanten.

Über Hauptlösungen und kanonische Integrationskonstanten gilt dann der folgende Satz:

Die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(\psi_1(x, \alpha, \beta) \dots \psi_m(x, \alpha, \beta))}{D(\beta_1 \dots \beta_m)}$$

ist von Null verschieden.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich einfach daraus, daß das Produkt der Funktionaldeterminanten der beiden zu einander inversen Transformationen

$$y_i = \psi_i(x, \alpha, \beta_1 \dots \beta_m)$$

und

$$\beta_i = \psi_i(\alpha, x, y_1 \dots y_m)$$

den Wert Eins hat. Es kann nun infolge davon keine der beiden Funktionaldeterminanten verschwinden, da beide endliche Größen sind. Insbesondere kann die erste Funktionaldeterminante, nämlich die Größe

$$\frac{D(\psi_1(x, \alpha, \beta) \dots \psi_m(x, \alpha, \beta))}{D(\beta_1 \dots \beta_m)}$$

nicht verschwinden, w. z. b. w.

2. **Andere Systeme von Integrationskonstanten.** An Stelle der Hauptlösungen mit den kanonischen Integrationskonstanten kann man andere Integrationskonstanten einführen durch eine reguläre Transformation

$$\beta_k = \varphi_k(c_1 \dots c_m).$$

Auf diese Weise erhalten wir eine andere Form der Lösungen

$$y_i = \chi_i(x, \alpha, c_1 \dots c_m),$$

wobei die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(y_1 \dots y_m)}{D(c_1 \dots c_m)} = \frac{D(y_1 \dots y_m)}{D(\beta_1 \dots \beta_m)} \cdot \frac{D(\beta_1 \dots \beta_m)}{D(c_1 \dots c_m)}$$

wieder von Null verschieden ist.

Wir wollen nun jedes System von Lösungen

$$y_i = \chi_i(x, c_1 \dots c_m)$$

ein allgemeines Lösungssystem nennen, wenn die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(\chi_1 \dots \chi_m)}{D(c_1 \dots c_m)}$$

von Null verschieden ist.

3. **Die Anfangsbedingungen.** Der Name allgemeines Lösungssystem hat folgende Bedeutung:

Aus dem Existenzbeweis folgt, daß durch ein Anfangswertsystem

$$x = \alpha, \qquad y_i = \beta_i$$

ein ganzes Lösungssystem eindeutig festgelegt ist.

Ein allgemeines Lösungssystem reicht nun aus, um dasjenige bestimmte (partikuläre) Lösungssystem anzugeben, welches für $x = \alpha$ den Wert $y_i = \beta_i$ annimmt.

Man braucht zu dem Zweck nur die Konstanten c_i so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$\beta_i = \chi_i(\alpha, c_1 \dots c_m)$$

erfüllt sind. Diese Bestimmung ist möglich, da ja der Voraussetzung nach die Funktionaldeterminante der Funktionen χ_i genommen nach den Größen c_k von Null verschieden ist.

Da nun $x = \alpha$ und $y_i = \beta_i$ im Regularitätsgebiet ganz beliebig genommen werden und das betrachtete Lösungssystem zu der Bestimmung aller partikulären Lösungssysteme ausreicht, so nennt man es eben ein allgemeines Lösungssystem.

4. **Geometrische Deutung.** Man kann die einzelne partikuläre Lösung deuten als eine Kurve des $(m + 1)$-dimensionalen Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1, y_1 \ldots y_m$, welche den Punkt

$$x = \alpha, \quad y_i = \beta_i$$

enthält. Die allgemeine Lösung oder das allgemeine Lösungssystem, in welchem die Größen β, resp. die Größen c unbestimmt gelassen werden, bedeutet dann die Gesamtheit aller Integralkurven, welche ein bestimmtes Raumgebiet treffen oder von Punkten dieses Raumgebietes ausgehen.

Die Bestimmung der Integrationskonstanten $c_1 \ldots c_m$, so daß die Funktionen für $x = \alpha$ den Wert $y_i = \beta_i$ annehmen, bedeutet dann folgendes: *Man bestimmt die Integralkurve so, daß sie einen Punkt* $x = \alpha$, $y_i = \beta_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ *enthält.*

Als Beispiel, an dem die verschiedenen Begriffe sich klar machen lassen, wählen wir das System

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}.$$

Das (allgemeine) Hauptlösungssystem lautet hier:

$$y = y_0 + (x - x_0) \cdot \frac{y_0}{x_0} = x \cdot \frac{y_0}{x_0},$$
$$z = z_0 + (x - x_0) \cdot \frac{z_0}{x_0} = x \cdot \frac{z_0}{x_0},$$

während z. B.

$$y = a x,$$
$$z = b x$$

ein anderes allgemeines Lösungssystem darstellt.

Aus diesem allgemeinen Lösungssystem erhält man leicht die durch den Punkt

$$x = x_0,$$
$$y = y_0,$$
$$z = z_0$$

gehende Integralkurve. Es ergiebt sich dabei

$$a = \frac{y_0}{x_0},$$

$$b = \frac{z_0}{x_0},$$

also

$$y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x,$$

$$z = \frac{z_0}{x_0} \cdot x,$$

was mit der ersten Form der allgemeinen Lösung identisch ist, wo die kanonischen Integrationskonstanten auftreten.

5. **Die Differentialgleichungen höherer Ordnung.** Die Differentialgleichungen höherer Ordnung (in zwei Variabeln) haben wir früher (§ 4, 2) umgeformt in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer größeren Anzahl von Variabeln. Deutet man sie statt dessen in der Ebene, so erhält man folgende Auffassung der Hauptlösungen:

Die Hauptlösung

$$y = \psi(x, y_0, y_0' \ldots y_0^{(m-1)})$$

stellt eine Integralkurve dar, welche den Punkt $x = x_0$, $y = y_0$ *enthält und welche in diesem Punkte* $m - 1$ *vorgeschriebene Differentialquotienten hat.*

Die Hauptlösung der Gleichung

$$y^{(m)} = 0$$

lautet z. B.

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''(x - x_0)^2}{1.2} \cdots + \frac{y_0^{(m-1)}(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Die Hauptlösung hat die Eigenschaft, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(\psi, \psi' \ldots \psi^{(m-1)})}{D(y_0, y_0' \ldots y_0^{m-1})}$$

nicht verschwindet (genau so, wie die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_m)}{D(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m)}$$

eines Systems von Null verschieden ist).

Aus der Hauptlösung erhalten wir eine allgemeine Lösung, wenn wir die Transformation

$$y_0 = \chi_1(c_1 \ldots c_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y_0^{(m-1)} = \chi_m(c_1 \ldots c_m)$$

ausführen, in welcher die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(y_0 \ldots y_0^{(m-1)})}{D(c_1 \ldots c_m)}$$

nicht verschwindet. Dann ist auch die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(\psi, \psi' \ldots \psi^{(m-1)})}{D(c_1 \ldots c_m)}$$

von Null verschieden.

Entsprechend nennen wir überhaupt

$$y = \psi(x, c_1 \ldots c_m)$$

eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$y^{(m)} = f(x, y, y' \ldots y^{(m-1)}),$$

wenn die Größen c innerhalb eines gewissen Gebietes beliebig gewählt werden können, und wenn die Funktionaldeterminante

$$\frac{D\left(\psi_1 \frac{d\psi}{dx} \ldots \frac{d^{(m-1)}\psi}{dx^{m-1}}\right)}{D(c_1, c_2 \ldots c_m)}$$

von Null verschieden ist.

Man kann dann die Konstanten c_i so bestimmen, daß die Kurve $y = \psi(x, c_1 \ldots c_m)$ einen bestimmten Punkt enthält und noch außerdem die $m - 1$ ersten Differentialquotienten der Funktion ψ in diesem Punkt vorgeschriebenen Werte haben; denn man kann ja die Gleichungen

$$y_0 = (\psi)_{x=x_0},$$

$$y_0' = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=x_0},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_0^{m-1} = \left(\frac{d\psi^{m-1}}{dx^{m-1}}\right)_{x=x_0}$$

nach den Größen c_i auflösen.

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$y'' = 0$$

hat die Hauptlösung

$$y = y_0 + (x - x_0) y_0'$$

oder die allgemeine Lösung

$$y = c_1 x + c_2.$$

Hier kann man c_1 und c_2 sofort durch die Forderung bestimmen, daß für $x = x_0$ die Bedingungen

$$y' = y_0',$$
$$y = y_0$$

erfüllt sein sollen.

Man kommt dabei auf die Gleichungen

$$y_0 = c_1 x_0 + c_2 ,$$
$$y_0' = c_1 ,$$

d. h.

$$c_1 = y_0', \quad c_2 = y_0 - x_0 y_0'.$$

6. **Implicite Gleichungen für die allgemeinen Lösungen.** Die allgemeinen Lösungen können schließlich auch implicite gegeben sein durch ein System von Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} &F_1 (y_1 \ldots y_m, x, c_1 \ldots c_m) = 0 , \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &F_m (y_1 \ldots y_m, x, c_1 \ldots c_m) = 0 , \end{aligned}$$

welche sich einerseits nach den Größen c_i und andererseits nach den Variabeln y auflösen lassen. Sind diese Auflösungen wirklich möglich, so stellen die Funktionen

$$(2) \qquad y_i = \psi_i (x, c_1 \ldots c_m)$$

ein System von allgemeinen Lösungen dar, denn man kann ja diese Gleichungen (2) oder vielmehr die ihnen äquivalenten Gleichungen (1) nach den Konstanten c_k auflösen. Ein solches System von Gleichungen wollen wir ein System von allgemeinen Integralgleichungen nennen.

Beispiel: Die allgemeinen Lösungen des Systems

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

kann man auch in der Form darstellen:

$$y + c_1 z = 0 ,$$
$$x + c_2 z = 0 .$$

Hieraus ergiebt sich sofort die frühere (aufgelöste) Form

$$z = - \frac{x}{c_2} ,$$
$$y = \quad \frac{c_1}{c_2} x_1 .$$

§ 10. Der Existenzbeweis für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. **Fragestellung.** Diejenige spezielle Form eines Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, auf welche sich alle partiellen Differentialgleichungen, die wir später behandeln werden, zurückführen lassen, ist die folgende:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum_{ik} G_{ik}^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad i = 1 \dots m,$$
$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum_{ik} G_{ik}^m \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \qquad k = 1 \dots n.$$

Die Funktionen G sind hier analytische Funktionen der Variabeln u_i und enthalten außer diesen Variabeln keine weiteren Argumente, also sie sind frei von den Variabeln $x, x_1 \dots x_n$.

Ferner sind die Größen $x, x_1 \dots x_n$ unabhängige Veränderliche, die Größen $u_1 \dots u_m$ dagegen abhängige Veränderliche.

Die Gleichungen sind ferner homogen und linear in den $m \cdot (n+1)$ ersten Differentialquotienten der zu bestimmenden Funktionen.

Endlich sind sie noch aufgelöst nach den Differentialquotienten der verschiedenen Funktionen, genommen nach einer der Variabeln (x).

Diese Variabeln u_i sind nun so zu bestimmen, daß gewisse Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Es soll nämlich der folgende Satz bewiesen werden:

Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sum_{ik} G_{ik}^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad i = 1 \dots m,$$
$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum_{ik} G_{ik}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad k = 1 \dots n,$$

wo die Funktionen G_{ik}^j analytische Funktionen der Argumente $u_1 \dots u_m$ sind, welche sich für $u_i = b_i$ regulär verhalten.

Gegeben seien außerdem m analytische Funktionen der Variabeln $x_1 \dots x_n$, etwa die Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \dots x_n),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_m(x_1 \dots x_n),$$

welche in der Umgebung von $x_i = a_i$ regulär sind und sich für $x_i = a_i$ auf $\varphi_k = b_k$ reduzieren.

Unter diesen Voraussetzungen kann man die Funktionen u_k so bestimmen, daß sie die Differentialgleichungen erfüllen und sich für $x = a$ auf

$$u_k = \varphi_k(x_1 \dots x_m)$$

reduzieren.

2. **Einführung eines vereinfachten Systems.** Der Beweis des Satzes ist ähnlich wie bei dem früher behandelten Problem der Inte-

gration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zu führen (§ 7).

Aus den geforderten Anfangsbedingungen und aus den Differentialgleichungen selbst kann man durch Differentiation die Werte der höheren Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \, \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \, \partial x_l} \text{ u. s. w.,} \quad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m \\ k = 1 \ldots n \\ l = 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

berechnen, während ja die Funktionswerte selbst und die ersten Differentialquotienten gegeben sind.

Diese Differentialquotienten geben dann die Koeffizienten für TAYLOR'sche Reihenentwickelungen der Funktionen u_i. Konvergieren diese Reihenentwickelungen, so stellen sie Lösungen dar, denn die Bedingungen

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = \sum_{ik} G_{ik}^j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (= \Psi_j)$$

sind im ganzen Konvergenzgebiet der Entwickelungen der Funktionen u_j erfüllt, da die Funktionen

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} \quad \text{und} \quad \Psi_j$$

für $x = a$, $x_i = a_i$ nicht nur selbst identisch wird, sondern zufolge der Berechnung auch in allen ihren Differentialquotienten übereinstimmen.

Es braucht also nur noch die Konvergenz der aufgestellten Reihenentwickelungen bewiesen zu werden.

Das geschieht, indem man ein vereinfachtes System integriert, welches folgende Eigenschaft hat: Die Koeffizienten der für die Lösungen v_i des vereinfachten Systems sich ergebenden Reihenentwickelungen sind größer als die absoluten Beträge der Koeffizienten der Reihenentwickelungen für die u_i.

Bevor diese Vereinfachung geschieht, wollen wir noch die Annahme machen, daß

$$a_1 = a_2 \ldots = a_n = b_1 \ldots = b_m = 0$$

ist, eine Annahme, welche erlaubt ist.

Nun wählen wir das in folgender Weise konstruierte Hilfssystem:

Erstens: Die Funktionen G_{ik}^j ersetzen wir durch

$$F = \frac{M}{1 - \frac{u_1 \ldots + u_m}{b}},$$

b bedeutet eine Größe, welche kleiner ist als der kleinste der absoluten Beträge $|u_j|$, für welche die Funktionen G noch alle konvergieren; M soll größer sein als die verschiedenen Maximalwerte der absoluten Beträge der Funktionen G^j_{ik} in dem gemeinsamen Konvergenzgebiet.

Zweitens ersetzen wir alle Funktionen φ durch die Funktion

$$\Phi = N\left(\frac{1}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{c}} - 1\right),$$

wo c und N für die Funktionen φ der Argumente $x_1 \ldots x_n$ dieselben Bedeutungen haben, wie b und M für die Funktionen G^j_{ik} der Argumente $u_1 \ldots u_m$.

Die Funktion F ist dann für

$$u_j = 0$$

jedenfalls dem absoluten Betrage nach kleiner als die Funktionen G, und dieselbe Ungleichheit gilt für die Differentialquotienten an der Stelle $u_j = 0$ (§ 6, 4).

Ferner sind die Differentialquotienten der Funktion Φ an der Stelle $x_i = 0$ größer als die der Funktionen φ (§ 6, 4).

Hieraus folgt dann, daß die berechneten Lösungen des Systems mindestens in demselben Gebiet konvergieren, wie die des vereinfachten Systems (§ 6, 5).

3. **Integration des vereinfachten Systems und Reduktion auf eine einzige Gleichung.** Wir müssen nun das Vergleichssystem integrieren, d. h. das System

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = \frac{M}{1 - \frac{v_1 \ldots + v_m}{b}} \sum_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad j = 1 \ldots m,$$

wobei den Funktionen v_j die Anfangswerte

$$(v_j)_{x=0} = N\left(\frac{1}{1 - \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{c}} - 1\right)$$

vorgeschrieben sind.

Dieses System läßt sich aber sofort vereinfachen:

Erstens erkennt man, daß die Funktionen v_j alle unter einander identisch werden, da sie für $x = x_1 \ldots = x_n = 0$ nicht nur selbst übereinstimmen, sondern auch alle ihre Differentialquotienten identisch sind.

Es bleibt also nur die Gleichung übrig

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Mm}{1 - \frac{mv}{b}} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \right).$$

Zweitens erkennt man, daß diese Funktion v außer von x nur von der Summe

$$x_1 + x_2 \ldots + x_n = z$$

abhängt, denn durch die Einführung von z nimmt die Differentialgleichung die Form

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Mmn}{1 - \frac{mv}{b}} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

an und die Anfangsbedingung wird

$$(v)_{x=0} = N\left(\frac{1}{1 - \frac{z}{c}} - 1 \right).$$

Diese Gleichung kann man aber leicht integrieren.
Man kann sie nach § 4, 3 ersetzen durch das System

$$\frac{dv}{dx} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{Mmn}{1 - \frac{mv}{b}}.$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems hat die Form

$$Mmnx + \left(1 - \frac{mv}{b}\right) z = f(v).$$

mit der Anfangsbedingung

$$\left(1 - \frac{m}{b}(v)_{x=0}\right) z = f(v)_{x=0},$$

d. h.

$$f(v) = \left(1 - \frac{m}{b} v\right) c \cdot \left(1 - \frac{N}{N+v}\right).$$

Als Lösung erhalten wir also schließlich eine der beiden Wurzeln der Gleichung

$$Mmnx + \left(1 - \frac{m}{b} v\right) \left\{ z - c\left[1 - \frac{N}{N+v}\right] \right\} = 0,$$

und zwar ist diejenige Wurzel zu nehmen, welche für $x = z = 0$ verschwindet (die andere hat den Wert $v = \frac{b}{m}$ für $x = z = 0$).

Diese Wurzel v ist eine für $x = z = 0$ analytische Funktion der Variabeln x, z, welche die vereinfachte Gleichung erfüllt und den vereinfachten Anfangswert hat.

Damit ist die im Beweis noch bestehende Lücke ausgefüllt und also der in § 10, 1 ausgesprochene allgemeine Satz bewiesen.

4. **Lineare nicht homogene Systeme von partiellen Differentialgleichungen.** Der allgemeine Fall, wo die Gleichungen zwar auch linear sind, aber nicht homogen, wo ferner die Funktionen G_{ik}^{j} außer den zu bestimmenden Funktionen u noch die unabhängigen Variabeln $x, x_1 \ldots x_n$ enthalten, läßt sich auf den früheren Fall zurückführen.

Man braucht zu dem Zwecke nur in den gegebenen Gleichungen

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = \sum_{ik} G_{ik}^{j}(u_1 \ldots u_m, x, x_1 \ldots x_n) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + H_j(u_1 \ldots u_m, x, x_1 \ldots x_n)$$

an Stelle von $x, x_1 \ldots x_n$ die Variabeln

$$z, z_1 \ldots z_n$$

einzuführen und zu dem gegebenen System die Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial z_2}{\partial x} \cdots = \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = 0$$

hinzuzufügen. Ferner ergänzt man die (für $x = a$) vorgeschriebenen Anfangsbedingungen, indem man zu den Gleichungen

$$u_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_m),$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_m = \varphi_m(x_1 \ldots x_m)$$

noch hinzunimmt

$$z = a, \quad z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n.$$

Auf die neuen $m + n + 1$ Differentialgleichungen mit $m + n + 1$ Anfangsbedingungen kann man den früheren Satz anwenden.

Das ergänzte Gleichungssystem ist mit dem gegebenen identisch, denn es werden einfach die Größen z (die Lösungen) identisch mit den Variabeln $x, x_1 \ldots x_n$ infolge der vorgeschriebenen Anfangsbedingungen und der vorgeschriebenen Differentialgleichungen.

Zweites Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei Veränderlichen.

§ 11. Der EULER'sche Multiplikator.

1. Definition des Multiplikators. Wir wollen die Differentialgleichung in der Form annehmen

$$y' - F(x,y) = 0,$$

welche wir noch etwas verallgemeinern, indem wir statt dessen schreiben:

$$X(x,y)\,y' - Y(x,y) = 0.$$

X und Y sind dann zwei Funktionen, welche analytisch sind, und außerdem darf die Funktion X in dem betrachteten Gebiet nicht verschwinden.

Nach § 4, 3 ist die Differentialgleichung integriert, sobald man eine Funktion $f(x,y)$ kennt, welche die partielle Differentialgleichung

$$X(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

erfüllt. (Man braucht dann nur die Gleichung

$$f(x,y) = c$$

noch aufzulösen, um eine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten.)

Zwischen einer derartigen Funktion $f(x,y)$ und den Koeffizienten $X(x,y)$ und $Y(x,y)$ bestehen also die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\,\varrho(x,y)\,Y(x,y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = +\,\varrho(x,y)\,X(x,y).$$

Gelingt es nun, eine Funktion ϱ zu finden, welche die Eigenschaft hat, daß

$$-\,\varrho(x,y)\,Y(x,y) \quad \text{und} \quad \varrho(x,y)\,X(x,y)$$

partielle Differentialquotienten einer Funktion, genommen nach x und y, sind, so ist damit das Problem der Integration auf Quadraturen zurückgeführt. Man hat ja dann, um die Funktion f zu bestimmen, nur noch aus dem vollständigen Differential

$$\varrho(x,y)\,X(x,y)\,dy - \varrho(x,y)\,Y(x,y)\,dx$$

die Funktion $f(x,y)$ zu bestimmen, wozu Quadraturen ausreichen (§ 5, 2).

Wegen der Eigenschaft, die Differentialgleichung

$$X(x,y)\,y' - Y(x,y) = 0$$

durch Multiplikation in einen vollständigen Differentialquotienten zu verwandeln, nennt man die von Euler eingeführte Funktion $\varrho(x,y)$ einen Euler'schen Multiplikator der gegebenen Differentialgleichung.

Es hat sich also ergeben, *daß die Integration der Differentialgleichung auf Quadraturen zurückgeführt ist, sobald man einen Euler'schen Multiplikator kennt.*

2. **Die Differentialgleichung zur Bestimmung des Multiplikators.** Aus der Definition des Multiplikators ergiebt sich, daß derselbe eine bestimmte partielle Differentialgleichung erfüllen muß, nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial(\varrho(x,y)\,Y(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho(x,y)\,X(x,y))}{\partial x} = 0$$

oder

$$Y\frac{\partial \log \varrho}{\partial y} + X\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0.$$

Das ist also eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung des Multiplikators. Die Reduktion des Problems der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung auf die Bestimmung des Multiplikators scheint also zunächst ein schwierigeres Problem (die Integration einer partiellen Differentialgleichung) an die Stelle eines einfacheren Problems (Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung) zu setzen.

Doch ist die partielle Differentialgleichung in vielen Fällen leicht zu integrieren, und es genügt ja, eine einzige Lösung derselben zu kennen, um einen Multiplikator zu haben.

Aus der Form, welche die partielle Differentialgleichung hat, folgt noch der wichtige Satz:

Der Quotient von zwei Multiplikatoren ist eine Lösung der Differentialgleichung.

Wenn nämlich

$$Y\frac{\partial \log \varrho_1}{\partial y} + X\frac{\partial \log \varrho_1}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

und

$$Y\frac{\partial \log \varrho_2}{\partial y} + X\frac{\partial \log \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

ist, so ist

$$Y\frac{\partial \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}{\partial y} + X\frac{\partial \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}{\partial x} = 0$$

oder es ist

$$\log \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

und also auch (§ 4, 3)

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

eine Lösung.

3. **Die homogene Differentialgleichung.** Wir wollen gleich eine Differentialgleichung behandeln, bei der man den Multiplikator leicht bestimmen kann; das ist die homogene Differentialgleichung. *Homogen* nennt man eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

in der also y' als eine homogene Funktion nullter Ordnung von y und x bestimmt wird.

Zur Bestimmung eines Multiplikators hat man die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho(x,y)\,F\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \frac{\partial(\varrho(x,y))}{\partial y} = 0,$$

von der

$$\varrho(x,y) = \frac{1}{y - xF\left(\frac{y}{x}\right)}$$

eine Lösung ist. Um dies zu erkennen, setzen wir

$$\frac{y}{x} = u$$

und haben dann

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varrho \cdot F) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F(u)}{y - xF(u)}\right) = \frac{\frac{1}{x}F'(u)(y - xF(u)) - (1 - F'(u))F(u)}{(y - xF(u))^2}$$

$$= -\frac{F(u) - uF'(u)}{(y - xF(u))^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{y - xF(u)} = \frac{F(u) - uF'(u)}{(y - xF(u))^2}.$$

Es ist also in der That

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho \cdot F) = 0.$$

Beispiel: Es sei

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x};$$

dann ist

$$\varrho = \frac{1}{y + \frac{x y}{x}} = \frac{1}{2 y}.$$

Durch Multiplikation mit diesem Multiplikator verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$\frac{y'}{2 y} + \frac{1}{2 x} = \frac{1}{2} \frac{d}{d x}(\log y + \log x) = 0.$$

Die Lösung lautet also

$$y \cdot x = \text{constans}.$$

4. **Die verkürzte lineare Differentialgleichung.** Unter einer verkürzten linearen Differentialgleichung verstehen wir eine Gleichung von der Form

$$y' + y f(x) = 0,$$

d. h. eine Gleichung, welche linear und homogen ist in der Unbekannten y und ihrem ersten Differentialquotienten.

Hier lautet die Gleichung zur Bestimmung des Multiplikators:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho) - \frac{\partial}{\partial y}(\varrho \cdot y \cdot f(x)) = 0$$

oder

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} - \frac{\partial \varrho}{\partial y} \cdot y \cdot f(x) - \varrho \cdot f(x) = 0.$$

Setzt man

$$\varrho = \frac{1}{y},$$

so ist diese Gleichung erfüllt.

In der That ist

$$\frac{y'}{y} + f(x) = \frac{d}{d x}\left(\log y + \int f(x)\, d x\right).$$

Es ist also

$$\log y + f(x) = c$$

und daher ist

$$y = c\, e^{-\int f(x)\, d x}$$

eine Lösung.

5. **Die unverkürzte lineare Differentialgleichung**

$$y' + y f(x) + \varphi(x) = 0.$$

Zur Bestimmung eines Multiplikators dient die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho(\varphi(x) + y f(x))\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\varrho) = 0$$

oder

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y} \cdot \left(\varphi(x) + y f(x)\right) + \varrho f(x) - \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0,$$

wovon

$$\varrho = e^{\int f(x)\, dx}$$

eine Lösung ist.

Hieraus ergiebt sich dann

$$e^{\int f(x)\,dx}\left(y' + y f(x) + \varphi(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int f(x)\,dx} + \int \varphi(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, d\,x\right) = 0$$

oder

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(-\int \varphi(x)\, e^{\int f(x)\,dx} + c\right).$$

Beispiel: Es sei gegeben die Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = 0,$$

dann ist also

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x}$$

und demnach

$$y = \frac{1}{x}(-x + c) = \frac{c}{x} - 1.$$

In der That ist auch

$$y' = -\frac{c}{x^2}$$

und

$$y' + \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = -\frac{c}{x^2} + \frac{c}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0.$$

6. **Die Riccati'sche Differentialgleichung.** Die Riccati'sche Differentialgleichung hat die Form:

$$y' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2,$$

wo A_0, A_1 und A_2 Funktionen von x sind.

Man kann leicht einen Multiplikator derselben angeben, wenn man zwei partikuläre Lösungen y_1 und y_2 kennt.

Die Gleichung für den Multiplikator lautet hier:

$$(A_0 + A_1 y + A_2 y^2)\frac{\partial \log \varrho}{\partial y} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial x} + A_1 + 2 A_2 y = 0.$$

Setzt man nun in diesen Ausdruck ein

$$\varrho = \left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right)^{-2} e^{-\int (A_1 + 2A_2 y_2)\,dx},$$

so erhält man

$$-2\left\{(A_0 + A_1 y + A_2 y^2)\frac{1}{y - y_1} - \frac{y_1'}{y - y_1} + \frac{y_1' - y_2'}{y_2 - y_1}\right\} - A_1 - 2A_2 y_2$$
$$+ A_1 + 2A_2 y,$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß y_1 und y_2 partikuläre Lösungen sind,

$$-2\left\{\frac{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 - A_0 - A_1 y_1 - A_2 y_1^2}{y - y_1} - \frac{A_1(y_2 - y_1) + A_2(y_2^2 - y_1^2)}{y_2 - y_1}\right\}$$
$$+ 2A_2(y - y_2)$$
$$= -2\{A_2(y + y_1) - A_2(y_2 + y_1)\} + 2A_2(y - y_2) = 0.$$

Hieraus folgt, daß ϱ ein Multiplikator ist. Außerdem aber folgt nach dem Satz über die Quotienten zweier Multiplikatoren (§ 11, 2) noch das Ergebnis:

Sind y_1, y_2 und y_3 drei partikuläre Lösungen, so erfüllt die allgemeine Lösung die Gleichung

$$f(y, y_1, y_2, y_3) = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} : \frac{y - y_3}{y_2 - y_3} = c.$$

Denn der Quotient von ϱ und ϱ', wo ϱ' aus ϱ dadurch erhalten wird, daß man y_3 an Stelle von y_1 setzt, lautet:

$$\left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right)^{-2} : \left(\frac{y - y_3}{y_2 - y_3}\right)^{-2},$$

und es ist also

$$(f(y, y_1, y_2, y_3))^{-2}$$

und daher auch

$$f(y, y_1, y_2, y_3)$$

selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(A_0 + A_1 y + A_2 y^2) = 0.$$

§ 12. Geometrische Deutung des Euler'schen Multiplikators.

1. **Berechnung des Normalrechtecks.** Für den Euler'schen Multiplikator giebt es eine von Lie herrührende einfache geometrische Deutung, die mitunter von vornherein einen Multiplikator zu bestimmen gestattet.

Zu dieser geometrischen Deutung gelangen wir durch folgende Betrachtung:

Wir wollen, wenn

$$X(x,y)\,y' - Y(x,y) = 0$$

die gegebene Differentialgleichung ist, und

$$f(x,y) = c$$

die Integralkurvenschar bedeutet, den Grenzwert suchen, welchem sich der Quotient des Zuwachses von c und eines gewissen Rechtecks nähert, wenn man den Zuwachs von c zur Grenze Null übergehen läßt. (Vgl. Fig. 1.)

Dieses Rechteck soll zur einen Seite den Abschnitt der Normale zwischen den beiden Integralkurven

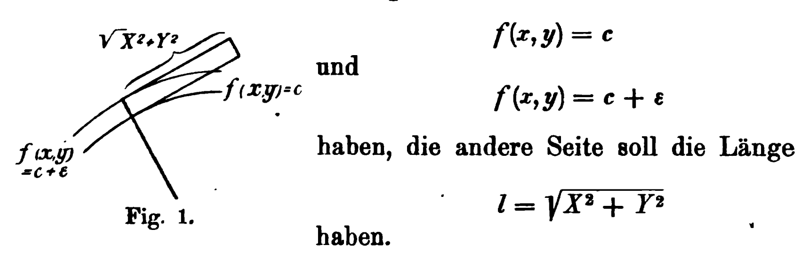


Fig. 1.

$$f(x,y) = c$$

und

$$f(x,y) = c + \varepsilon$$

haben, die andere Seite soll die Länge

$$l = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

haben.

Die Länge des Normalenabschnittes α ist gegeben durch

$$m = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

wo

$$(\xi - x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$(\eta - y) = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$

und

$$f(\xi, \eta) = f\left(x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) = c + \varepsilon$$

ist.

Es ist dann bis auf Größen höherer Ordnung in ε

$$f(x,y) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) = c + \varepsilon,$$

also

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

und daher — ebenfalls bis auf Größen höherer Ordnung in ε —

$$m = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Für den Quotienten

$$\frac{l m}{\varepsilon}$$

bekommen wir also

$$\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

2. **Deutung des Euler'schen Multiplikators.** Auf der anderen Seite können wir nun leicht zeigen, daß der Multiplikator den reziproken Wert hat, oder genauer ausgedrückt, daß es einen Euler'schen Multiplikator giebt, der diesen Wert hat.

Wenn nämlich $M(x,y)$ ein Euler'scher Multiplikator ist, so ist

$$M(x,y)\big(X(x,y)\,dy - Y(x,y)\,dx\big) = df(x,y);$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -M\cdot Y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = M\cdot X,$$

und daher

$$M = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Hieraus folgt also der Satz:

Der Euler'sche Multiplikator ist gleich dem Reziproken des Grenzwertes, welchen der Quotient

$$\frac{R}{\varepsilon}$$

annimmt für $\varepsilon = 0$. *Hierbei ist unter* R *das Rechteck verstanden, dessen eine Seite der Abschnitt einer Normale zwischen zwei benachbarten Integralkurven*

$$f(x,y) = c$$

und

$$f(x,y) = c + \varepsilon$$

ist, während die andere Seite den Wert $l = \sqrt{X^2+Y^2}$ *hat.*

Den Wert dieses Rechtecks kann man nun in vielen Fällen berechnen; ferner auch den Grenzwert und damit also den Multiplikator.

3. **Parallelkurven.** Wenn z. B. eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung gegeben ist, die Parallelkurven definiert, d. h. Kurven, welche alle eine bestimmte Geradenschar senkrecht schneiden, so ist der Abstand zwischen den entsprechenden Punkten von zwei benachbarten Kurven der Schar überall derselbe; der Inhalt des erwähnten Rechtecks ist also einfach

$$\varepsilon \sqrt{X^2 + Y^2},$$

und es ist demnach

$$M = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

ein Multiplikator.

Beispiel: Die Gleichung

$$y y' + x = 0$$

hat den Multiplikator

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und definiert konzentrische Kreise

$$x^2 + y^2 = \text{constans},$$

welche in der That Parallelkurven sind.

4. **Isogonale Trajektorien einer Geradenschar.** Die Parallelkurven haben die Eigenschaft, alle Geraden einer Schar (nämlich die gemeinsamen Normalen) unter demselben Winkel $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ zu schneiden. Auch in dem allgemeineren Falle, wo an Stelle des Winkels $\frac{\pi}{2}$ der Winkel ϑ tritt, kann man nun mit Hilfe geometrischer Betrachtungen den Multiplikator leicht berechnen. (Fig. 2.)

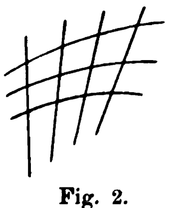


Fig. 2.

Fig. 3.

Bezeichnet man nämlich das Stück, welches von einer Geraden g_i durch zwei benachbarte isogonale Trajektorien herausgeschnitten wird, mit ε_i und betrachtet man nun eine Reihe von Geraden aus der Schar $g_0, g_1 \ldots g_n$, von denen je zwei benachbarte den sehr kleinen Winkel φ einschließen, so ist bis auf Größen höherer Ordnung

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i (1 + \operatorname{cotg} \vartheta \,.\, \varphi) = \varepsilon_0 (1 + \operatorname{cotg} \vartheta \,.\, \varphi)^n. \quad \text{(Vgl. Fig. 3.)}$$

Geht man jetzt zur Grenze über, indem $\varphi = \frac{\psi}{n}$ und $n = \infty$ gesetzt wird, so kommt bis auf Größen höherer Ordnung in ε_0:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot e^{\psi \operatorname{cotg} \vartheta}.$$

Der Abstand zwischen zwei Nachbarkurven ist dann

$$\varepsilon \cdot \sin \vartheta = \varepsilon_0 \sin \vartheta \, e^{\psi \operatorname{cotg} \vartheta}.$$

Der Inhalt des zu berechnenden Rechtecks ist demnach

$$\varepsilon_0 \sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{\psi \operatorname{cotg} \vartheta},$$

und wir bekommen also den Multiplikator

$$M = \frac{e^{-\psi \operatorname{cotg} \vartheta}}{\sin \vartheta \sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Beispiel: *Die logarithmischen Spiralen.* Wir wollen diejenigen Kurven bestimmen, welche die vom Koordinatenanfang ausgehenden Geraden alle unter demselben Winkel

$$\vartheta = \operatorname{arccotg} a$$

treffen:

Die Kotangente des Winkels zwischen Kurvenrichtung und Radiusvector ist

$$\frac{x + y y'}{x y' - y} = \operatorname{cotg} \vartheta.$$

Also lautet die Differentialgleichung

$$y'(y - a x) + (x + a y) = 0.$$

Nach dem allgemeinen Satz muß also

$$\frac{\sqrt{1 + a^2}\, e^{-a . \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{a \sqrt{(y - a x)^2 + (x + a y)^2}}$$

oder auch

$$\frac{e^{-a . \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ein Multiplikator sein.

Es ist nun in der That auch

$$\frac{e^{-a . \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \cdot \left\{y'(y - a x) + (x + a y)\right\} = \frac{d}{dx} \left\{\sqrt{x^2 + y^2}\, e^{-a . \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}\right\}.$$

Die Lösung lautet also

$$\sqrt{x^2 + y^2}\, e^{-a . \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = c,$$

oder, wenn man durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \cdot \sin \varphi$$

Polarkoordinaten einführt,

$$\varrho = c e^{a \cdot \varphi}.$$

Diese Gleichung stellt die *logarithmischen Spiralen* dar, welche die vom Anfangspunkt ausgehenden Strahlen unter dem Winkel

$$\vartheta = \operatorname{arccotg} a$$

schneiden.

§ 13. Die Linienelementvereine.

1. **Das Linienelement und seine Koordinaten.** Um neue Methoden zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bekommen, welche in vielen Fällen sich anwenden lassen, wo die in den vorigen Paragraphen besprochene Methode (Bestimmung eines Multiplikators) versagt, müssen wir die Begriffe *Linienelement* und *Linienelementverein* entwickeln.

Unter einem Linienelement verstehen wir den Inbegriff von einem Punkt (dem Träger) und einer bestimmten Richtung.

Diese Richtung stellt man sich vor in der Form einer geraden Linie, welche von dem Punkt ausgeht. Von dieser geraden Linie kommt bei der Vorstellung der Richtung nur dasjenige Stück in Betracht, das dem Träger benachbart ist, und welches beliebig klein vorgestellt werden darf. Deswegen bezeichnet man eben ein solches Gebilde als Linienelement.

Ein Linienelement der Ebene ist durch drei Koordinaten bestimmt. Man muß erstens den Träger festlegen — etwa durch die rechtwinkligen Koordinaten x, y —, und sodann noch die Richtung. Hierzu benützen wir die Koordinate

$$p = \operatorname{tg} \varphi,$$

wobei unter φ der Winkel verstanden ist, den die Richtung des Linienelementes mit der x-Axe des Koordinatensystems einschließt. (Fig. 4.)

Fig. 4.

2. **Scharen von Linienelementen.** Unter einer Schar von Linienelementen verstehen wir die *Gesamtheit aller Linienelemente, welche durch ein System analytischer Gleichungen gegeben sind.*

Eine solche Schar von Linienelementen ist also gegeben durch Gleichungen von der Form

$$x = x(t_1 \ldots t_k),$$
$$y = y(t_1 \ldots t_k),$$
$$z = z(t_1 \ldots t_k).$$

Die Zahl k kann dabei — unter der Voraussetzung, daß von den Variabeln t keine überzählig ist (§ 3, 3) — nicht größer als drei sein. Ist sie gleich drei, so werden sämtliche Linienelemente eines gewissen Bereiches durch die Gleichungen dargestellt. Je nachdem nun $k = 1, 2, 3$ ist, nennen wir die Schar eingliedrig, zweigliedrig oder dreigliedrig.

Wir wollen Beispiele von solchen Scharen anführen:

a) $x = 0$, $y = 0$ stellt die Gesamtheit aller Linienelemente dar, deren Träger der Koordinatenanfang ist. (Vgl. Fig. 5.)

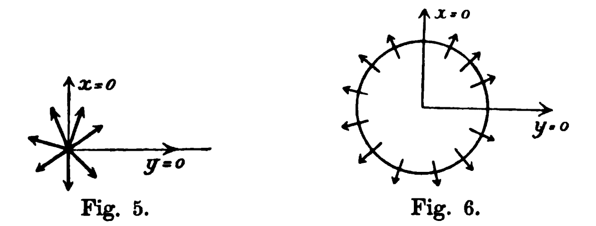


Fig. 5. Fig. 6.

b) $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $p = \operatorname{tg} \varphi$ stellt diejenige Schar von Linienelementen dar, deren Träger die Punkte des Einheitskreises sind, während ihre Richtungen mit den vom Koordinatenanfang ausgehenden, den betreffenden Punkt enthaltenden Strahlen übereinstimmen. (Vgl. Fig. 6.)

c) $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $p = -\operatorname{cotg} \varphi$ stellt ebenfalls Linienelemente dar, deren Träger den Einheitskreis ($x^2 + y^2 = 1$) bilden. Die Richtungen dieser Linienelemente sind aber hier nicht durch die Radien, sondern durch die Tangenten des Kreises gegeben. (Fig. 7.)

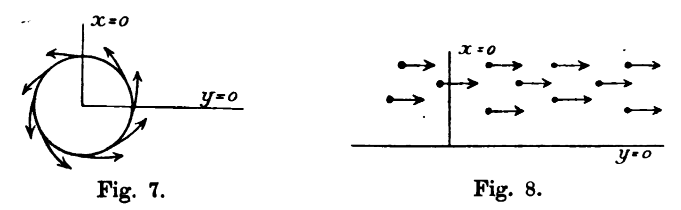


Fig. 7. Fig. 8.

Es ist in der That die Richtung der Tangente im Punkte

$$x = \cos \varphi,$$
$$y = \sin \varphi$$

des Einheitskreises gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos y}{\sin \varphi} = -\operatorname{cotg} \varphi.$$

d) $p = 0$ stellt alle Linienelemente dar, welche der x-Achse parallel sind. (Fig. 8.) $a - c$ sind eingliedrige Scharen, d giebt eine zweigliedrige Schar.

3. **Linienelementvereine.** Von den angeführten vier Beispielen von Linienelementscharen haben das erste und das dritte eine charakteristische Eigenschaft, welche den anderen Beispielen nicht zukommen.

Analytisch drückt sich diese Eigenschaft so aus: Es ist die Gleichung

$$\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = 0$$

erfüllt.

Bei dem ersten Beispiel, wo x und y konstant sind, ist dies eo ipso klar; bei dem dritten erkennt man, wenn

$$x = \cos t,$$
$$y = \sin t,$$
$$p = -\operatorname{cotg} t$$

gesetzt wird (wenn man also an Stelle von φ die Variable t einführt), daß

$$\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t \cdot (-\operatorname{cotg} t) = 0$$

ist.

Dagegen erkennt man leicht, daß weder bei dem zweiten, noch bei dem vierten Beispiel diese Relation erfüllt ist.

Bei dem zweiten haben wir

$$\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = \cos t + \operatorname{tg} t \cdot \sin t = \frac{1}{\cos t},$$

und bei dem vierten, wo wir etwa x und y als Parameter einführen wollen, bestehen die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial x} - p\frac{\partial y}{\partial x} = 1,$$
$$\frac{\partial x}{\partial y} - p\frac{\partial y}{\partial y} = -p.$$

Beide Ausdrücke sind von Null verschieden.

Wir wollen nun jede Schar von Linienelementen

$$x = x(t_1, t_2, t_3),$$
$$y = y(t_1, t_2, t_3),$$
$$p = p(t_1, t_2, t_3),$$

bei der die Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

bestehen, einen Verein nennen.

4. **Die verschiedenen Arten von Linienelementvereinen.** Wir wollen jetzt die verschiedenen Arten von Linienelementen bestimmen.

a) Dreidimensionale Vereine. Der Versuch, dreidimensionale Linienelemente zu bestimmen, scheitert; denn die drei Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} - p\frac{\partial x}{\partial t_1} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_2} - p\frac{\partial x}{\partial t_2} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_3} - p\frac{\partial x}{\partial t_3} = 0$$

können nur dann gleichzeitig bestehen, wenn die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_1} \\ \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y}{\partial t_3} & \frac{\partial x}{\partial t_3} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t_3} & \frac{\partial x}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_1} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Dann verschwindet aber auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial p}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial p}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x}{\partial t_3} & \frac{\partial y}{\partial t_3} & \frac{\partial p}{\partial t_3} \end{vmatrix}$$

und die Schar kann also nicht dreigliedrig sein (§ 3, 3).

b) Zweidimensionale Vereine. Auch zweidimensionale Vereine giebt es nicht; denn es müßten bei einem solchen Verein die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} - p\frac{\partial x}{\partial t_1} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_2} - p\frac{\partial x}{\partial t_2} = 0,$$

d. h. es wäre

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_1} \\ \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \end{vmatrix} = 0,$$

und demnach wären x und y nicht unabhängige Funktionen. x und y lassen sich also als Funktionen eines Parameters ausdrücken, und da p mit bestimmt ist, haben wir einen eindimensionalen, keinen zweidimensionalen Verein.

c) Eindimensionale Vereine. Wir können leicht die eindimensionalen Vereine von Linienelementen bestimmen, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind:

Erstens können die Linienelemente alle denselben Träger haben; es ist dann

$$x = \text{constans} = x_0, \; y = y_0,$$

während p beliebig ist.

Zweitens können die Träger eine Kurve bilden

$$y = f(x).$$

Für p bekommen wir dann den Wert

$$p = f'(x) \cdot \left(= \frac{dy}{dx}\right).$$

In diesem Fall sind also die Richtungen der Linienelemente identisch mit den Richtungen der Tangenten. Wir wollen ein solches Linienelement als „Linienelement der Kurve $y = f(x)$" bezeichnen.

Als Endergebnis haben wir also gefunden:

Es giebt in der Ebene nur eindimensionale Linienelementvereine. Die Elemente eines solches Vereines haben entweder denselben Träger, oder, wenn die Träger eine Kurve bilden, sind die Linienelemente gegeben durch die den Trägern zugehörigen Richtungen der Tangente.

5. **Erweiterung der Begriffe „Kurve" und „Berührung".** Wir haben soeben gesehen, daß eine Kurve, aufgefaßt als Gebilde von Linienelementen (Punkten und Tangenten), sich dem allgemeinen Begriff „Linienelementverein" unterordnet. Zu den Linienelementvereinen gehören nun nicht nur die Kurven, sondern, wie wir gesehen haben, auch die Punkte. Wir wollen daher von jetzt an den Begriff „Kurve" ersetzen durch den allgemeinen Begriff „Linienelementverein".

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Deutung für den Begriff des Berührens zweier Kurven zu geben, welche sich auf alle Linienelementvereine überträgt.

Zwei Kurven *berühren* sich in einem Punkte, wenn sie nicht nur den Punkt gemeinsam haben, sondern in diesem auch die Tangente, m. a. W., wenn sie ein *gemeinsames Linienelement* haben.

Analog definieren wir:

Zwei Linienelementvereine berühren sich, wenn sie ein gemeinsames Linienelement haben.

Beispiele: Der Kreis $x^2 + y^2 - y = 0$ (d. h. der Elementverein

$$x^2 + y^2 - y = 0,$$
$$2(x + py) - p = 0),$$

und die Gerade $y = 0$ (d. h. der Elementverein

$$y = p = 0),$$

haben das gemeinsame Linienelement

$$x = y = p = 0,$$

sie berühren sich also in diesem Linienelement. (Fig. 9.)

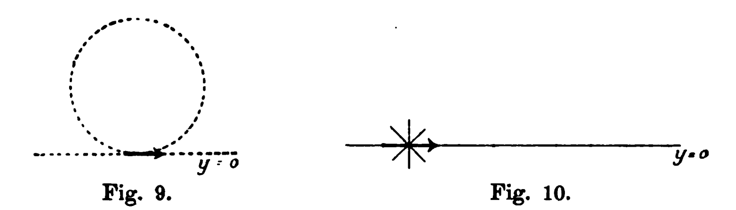


Fig. 9. Fig. 10.

Ferner: Die Gerade $x = 0$ und der Punkt $x = y = 0$ haben das gemeinsame Linienelement

$$x = y = p = 0,$$

sie berühren sich also in diesem Linienelement. (Fig. 10.)

§ 14. Erweiterung des Integrationsproblems der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

1. **Bestimmung der aus einer zweigliedrigen Schar herausgegriffenen Linienelementvereine.** Eine zweigliedrige Schar von Linienelementen ist gegeben durch eine Gleichung von der Form

(1) $$f(x, y, p) = 0.$$

Stellen wir uns nun die Aufgabe, diejenigen Linienelementvereine zu bestimmen, deren Elemente der zweigliedrigen Schar angehören, so müssen wir x, y, p so als Funktionen eines Parameters t bestimmen, daß außer der Gleichung (1) noch die Gleichung

(2) $$\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = 0$$

erfüllt ist.

Diese Aufgabe umfaßt nun, wie wir zeigen wollen, das Integrationsproblem der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung als einen speziellen Fall.

Wird nämlich nur verlangt, diejenigen unter den genannten Linienelementvereinen zu bestimmen, welche K u r v e n sind (§ 13, 4, c), so hat man die beiden Gleichungen

$$f(x, y, p) = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = p$$

zu erfüllen, d. h. man hat die Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

zu integrieren.

Indem wir nun die genannten Elementvereine kurzweg als „Integralgebilde" und zwar, je nachdem der Träger ein Punkt ist, oder aber die Träger eine Kurve bilden, als „Integralpunkt" oder „Integralkurve" bezeichnen, erhalten wir folgenden Satz:

Die Bestimmung der Lösungen einer Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

ist geleistet, sobald man alle Integralgebilde der Gleichung

$$f(x, y, p) = 0$$

kennt.

Unter den Integralgebilden dieser Gleichung hat man dann nur die Integralkurven herauszunehmen.

Wir wollen nun von jetzt an das Problem der Integration immer allgemein auffassen, d. h. *alle* Integralgebilde (nicht nur die Integralkurven) suchen.

2. **Beispiel.** Die Gleichung

$$x - py = 0$$

hat folgende Integralgebilde:

Erstens als Integralkurven die durch den Koordinatenanfang gehenden geraden Linien

$$y = cx.$$

Zweitens einen Integralpunkt $x = y = 0$.

Während also die Integration im gewöhnlichen Sinne, d. h. die Bestimmung der Lösungen nur auf die Geraden

$$y = cx$$

führt, tritt bei der erweiterten Auffassung noch das Integralgebilde

$$y = x = 0$$

hinzu.

3. **Bemerkung über die verallgemeinerten Differentialgleichungen.** Die verallgemeinerte Auffassung des Integrationsproblems bringt es mit sich, daß man auch noch solche Gleichungen als Differentialgleichungen bezeichnet, welche die Größe p (oder y') überhaupt nicht enthalten. Denn auch solche Gleichungen stellen eine zweigliedrige Schar von Linienelementen dar, welche sich zu Vereinen zusammenfassen lassen.

Z. B. stellt die Gleichung

$$y = 0$$

lauter Vereine von Elementen dar, deren Träger je ein Punkt auf der x-Axe ist, während die Richtungen willkürlich sind.

4. **Das Umhüllungsgebilde.** Wenn eine Schar von Kurven gegeben ist, und alle diese Kurven berühren dieselbe Kurve, so nennt man diese letztere die „Enveloppe" der Kurvenschar.

Z. B. haben die Parabeln (Fig. 11)

$$y = (x - a)^2$$

die Enveloppe

$$y = 0.$$

y = 0

Fig. 11.

Die charakteristische Eigenschaft der Enveloppe ist, *daß ihre Tangenten mit den Tangenten der einhüllenden Kurven im gemeinsamen Punkt übereinstimmen.*

Die Enveloppe ist also ein Linienelementverein, dessen einzelne Elemente den verschiedenen Linienelementvereinen der Schar angehören.

Auch dieser Begriff läßt sich leicht verallgemeinern. Ist eine eingliedrige Schar von Linienelementvereinen gegeben, und giebt es einen Verein, welcher mit jedem Verein der Schar ein Element gemeinsam hat, so nennen wir diesen Verein das *Umhüllungsgebilde.*

Z. B. haben die Punkte $y = 0$, $x = t$ das Umhüllungsgebilde

$$y = p = 0.$$

Ferner haben die Geraden $y = cx$ das Umhüllungsgebilde (Fig. 12)

$$x = y = 0.$$

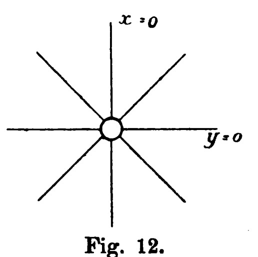


Fig. 12.

Über Umhüllungsgebilde gilt der allgemeine Satz:

Haben die Integralgebilde einer Differentialgleichung erster Ordnung ein Umhüllungsgebilde, so ist dieses Umhüllungsgebilde ebenfalls ein Integralgebilde der Differentialgleichung.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich einfach aus den Definitionen: Der Definition nach gehören die Elemente des Umhüllungsgebildes der Schar an; sie bilden andererseits einen Verein. Aus diesen beiden Umständen zusammen folgt aber, daß dieser Verein ein Integralgebilde der gegebenen Gleichung ist.

§ 15. Die Berührungstransformationen.

1. **Definition der Berührungstransformationen.** Unter einer Berührungstransformation wollen wir eine Transformation der

Linienelemente der Ebene verstehen, welche jeden Elementverein wieder in einen Elementverein überführt.

Aus dieser Forderung ergiebt sich leicht ein analytisches Kriterium für die Berührungstransformationen.

Sollen nämlich die Gleichungen

$$x_1 = x_1(x, y, p),$$
$$y_1 = y_1(x, y, p),$$
$$p_1 = p_1(x, y, p)$$

eine Berührungstransformation definieren, d. h. soll jeder Linienelementverein wieder in einen Linienelementverein übergehen, so muß eine Gleichung von der Form bestehen

$$\frac{dy_1}{dt} - p_1 \frac{dx_1}{dt} = \varrho(x, y, p)\left(\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt}\right).$$

Denn es soll ja, sobald die Gleichung besteht

$$\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = 0$$

auch die Gleichung bestehen

$$\frac{dy_1}{dt} - p_1 \frac{dx_1}{dt} = 0.$$

Beispiel einer Berührungstransformation: Die Gleichungen

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = xp - y,$$
$$p_1 = -x$$

definieren eine Berührungstransformation, denn es ist

$$\frac{dy_1}{dt} - p_1\frac{dx_1}{dt} = -\frac{dy}{dt} + x\frac{dp}{dt} + p\frac{dx}{dt} - x\frac{dp}{dt} = -\frac{dy}{dt} + p\frac{dx}{dt}.$$

Die Gleichungen stellen auch wirklich eine Transformation dar, da die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(x_1, y_1, p_1)}{D(x, y, p)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ p & -1 & x \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1$$

von Null verschieden ist.

Aus der Definition der Berührungstransformationen und der Umhüllungsgebilde folgt noch der Satz:

Bei einer Berührungstransformation geht das Umhüllungsgebilde eines Linienelementvereins in das Umhüllungsgebilde des transformierten Elementvereins über.

2. **Die erweiterten Punkttransformationen.** Unsere Kenntnis der verschiedenen Arten von Elementvereinen reicht aus, um alle möglichen Klassen von Berührungstransformationen zu bestimmen.

Eine erste Klasse von Berührungstransformationen erhalten wir durch folgende Betrachtung: Da jeder Elementverein wieder in einen Elementverein übergehen soll, wird es eine bestimmte Klasse von Berührungstransformationen geben, bei denen die Punkte, d. h. diejenigen Vereine, welche aus allen Elementen mit gemeinsamem Träger bestehen, wieder in Punkte übergehen.

Die Formeln, welche eine solche Transformation definieren, müssen von folgender Gestalt sein:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x,y), \\ y_1 &= y_1(x,y), \\ p_1 &= p_1(x,y,p). \end{aligned}$$

Man kann nun leicht, wenn x_1 und y_1 gegeben sind, p_1 aus der Forderung

$$\frac{dy_1}{dt} - p_1\frac{dx_1}{dt} = \varrho(x,y,p)\left(\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt}\right)$$

bestimmen.

Denn es folgt aus dieser Forderung, daß

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} = -\varrho\cdot p$$

und

$$\frac{\partial y_1}{\partial y} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial y} = \varrho$$

sein muß, also

$$p_1 = \frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x} + p\dfrac{\partial y_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + p\dfrac{\partial x_1}{\partial y}}.$$

Wir können auch zeigen, daß die Gleichungen wirklich eine Transformation definieren, wenn die beiden ersten Gleichungen für sich genommen eine Punkttransformation definieren; denn die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y} & \dfrac{\partial x_1}{\partial p} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x} & \dfrac{\partial y_1}{\partial y} & \dfrac{\partial y_1}{\partial p} \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial x} & \dfrac{\partial p_1}{\partial y} & \dfrac{\partial p_1}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{D(x_1,y_1,p_1)}{D(x,y,p)}$$

hat den Wert

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} + p\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial p} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right),$$

ist also von Null verschieden.

Wir wollen die Hinzufügung der Gleichung

$$p_1 = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial x} + p\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\frac{\partial y_1}{\partial y} + p\frac{\partial x_1}{\partial y}}$$

die **Erweiterung** der Punkttransformation nennen, und die erhaltene Berührungstransformation als **erweiterte Punkttransformation** bezeichnen.

Beispiel einer erweiterten Punktransformation. Ein Beispiel einer erweiterten Punkttransformation ist

$$x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$

$$y_1 = y\cos\varphi + x\sin\varphi,$$

$$p_1 = \frac{p\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - p\sin\varphi}.$$

3. **Die Punktkurventransformationen.** Zu einer viel allgemeineren Klasse von Berührungstransformationen gelangt man durch die folgende Betrachtung: Wir wollen den Punkten der Ebene nicht wieder *Punkte* zuordnen, sondern andere Elementvereine, also *Kurven.* Den Linienelementen, welche einen gemeinsamen Träger haben, entsprechen dann also alle Linienelemente einer gewissen Bildkurve, welche jenem Träger entspricht. Für diese Zuordnung ist eine Gleichung

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

notwendig, welche die einem bestimmten Punkt

$$x = a, \quad y = b$$

zugeordnete Kurve

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$$

angiebt. Wir wollen dieselbe die **charakteristische Gleichung** der Berührungstransformation nennen.

Von der charakteristischen Gleichung aus gelangt man zu den Formeln für die Berührungstransformation durch folgende Betrachtung: Es muß die Gleichung bestehen

$$\frac{dy_1}{dt} - p_1\frac{dx_1}{dt} = \varrho\left(\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt}\right).$$

Andererseits besteht aber die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\frac{d x_1}{d t}+\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\frac{d y_1}{d t}+\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{d x}{d t}+\frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{d y}{d t}=0.$$

Aus beiden Gleichungen zusammen folgt:

$$\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}{1}=\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{-p_1}=\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{-\varrho}=\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\varrho p}$$

oder

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}=0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}+p\frac{\partial \Omega}{\partial y}=0.$$

D. h. also: *Wenn die Gleichung*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1)=0$$

die charakteristische Gleichung einer Berührungstransformation ist, so ist die Berührungstransformation selbst gegeben durch die Gleichungen

$$\Omega(x, y, x_1, y_1)=0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}+p\frac{\partial \Omega}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}=0.$$

4. **Die Bedingung der Auflösbarkeit und ihre geometrische Bedeutung.** Damit man nun aus diesen drei Gleichungen wirklich die drei Größen x_1, y_1, p_1 bestimmen kann, ist es notwendig, daß man aus den ersten beiden die Größen x_1 und y_1 bestimmen kann (durch die dritte Gleichung ist dann p_1 gegeben).

Es darf also die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial x_1}+p\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y\,\partial x_1}, & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial y_1}+p\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y\,\partial y_1} \end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{1}{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}\cdot\Big[\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial y_1}\frac{\partial \Omega}{\partial y}-\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y\,\partial y_1}\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$$
$$-\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial x_1}\frac{\partial \Omega}{\partial y}-\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y\,\partial x_1}\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)\Big]$$

nicht verschwinden.

Diese Bedingung ist nun stets erfüllt, wenn die Gleichung $\Omega=0$ wirklich eine zweigliedrige Kurvenschar darstellt, d. h. wenn die Mannigfaltigkeit der Kurven

$$\Omega(x, y, x_1, y_1)=0$$

in der $x_1 y_1$-Ebene eine zweifache ist.

Das Kriterium dafür, daß eine Kurvenschar zweigliedrig ist, ist folgendes: Man muß, wenn in einem Punkt eine Tangentialrichtung vorgeschrieben ist, stets eine Kurve angeben können, welche den Punkt enthält und in ihm die vorgeschriebene Tangente hat, m. a. W.: Es muß diese Kurve durch die Angabe eines Linienelementes, welches sie enthalten soll, bestimmt sein.

Analytisch drückt sich die Forderung so aus: Es müssen die Gleichungen

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0$$

sich nach x und y auflösen lassen, d. h. es darf die Funktionaldeterminante

$$\frac{1}{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x_1} \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial y_1} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x_1} \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \right) \right]$$

von Null verschieden sein.

Diese Funktionaldeterminante unterscheidet sich aber von der vorigen nur um den Faktor

$$\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}},$$

welcher von Null verschieden ist.

Hieraus folgt also: *Wenn die Gleichung*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

eine zweigliedrige Kurvenschar der $x_1 y_1$-Ebene definiert, so stellen die Formeln

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0$$

eine Berührungstransformation dar.

5. **Die Legendre'sche Transformation.** Als Beispiel einer Punktkurventransformation wollen wir die folgende nehmen, deren charakteristische Gleichung lautet:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = x x_1 + y + y_1 = 0.$$

Zur Bestimmung der Transformation brauchen wir noch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} = x_1 + p = 0$$

und

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = x + p_1 = 0 .$$

Löst man nun auf, so kommt

$$x_1 = -p ,$$
$$y_1 = xp - y ,$$
$$p_1 = -x .$$

Diese Formeln definieren in der That auch eine Berührungstransformation (§ 15, 1). Man nennt sie die LEGENDRE'sche Transformation.

Jedem Punkt entspricht dabei eine gerade Linie, nämlich dem Punkt

$$x = a ,$$
$$y = b$$

entspricht die Linie

$$a x_1 + b + y_1 = 0 ,$$
$$p_1 = -a .$$

Diese Linie ist die Polare[1] des Punktes ab in Bezug auf die Parabel (Fig. 13)

$$x_1^2 + 2y_1 = 0 . \text{ —}$$

Den Punkten der Parabel

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

entsprechen die Geraden

$$x x_1 - \frac{x^2}{2} + y_1 = 0 ,$$

welche die Tangenten der Parabel sind.

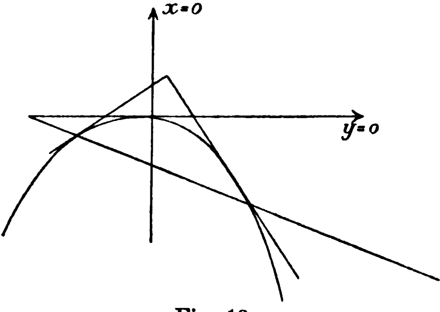


Fig. 13.

Einer bestimmten Kurve, welche ja aufgefaßt werden kann als Umhüllungsgebilde ihrer Punkte (d. h. derjenigen Elementvereine, welche aus allen Linienelementen mit demselben Träger bestehen, und deren Träger die Punkte der Kurven sind), entspricht die von den Polaren ihrer Punkte umhüllte Kurve (§ 15, 1).

[1] F. SCHUR, Analytische Geometrie, p. 103.

Insbesondere entspricht daher die Parabel

$$y = -\frac{x^2}{2},$$
$$p = -x$$

sich selbst. Dies kann man auch aus den Formeln ablesen.

Es entspricht nämlich einem bestimmten Linienelement der Parabel das Element

$$x_1 = -p = x,$$
$$y_1 = xp - y = -x^2 + \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} = y,$$
$$p_1 = -x = p.$$

Also ein Linienelement der Parabel entspricht sich selbst.

6. **Die Fußpunkttransformation.** Als zweites Beispiel wollen wir die durch die Gleichung

$$\Omega(x, y, x_1, y_1 = x_1^2 + y_1^2 - x x_1 - y y_1 = 0$$

definierte Berührungstransformation wählen.

Hier wird dem Punkt xy ein Kreis zugeordnet, der durch den Koordinatenanfang und durch den Punkt xy geht und den vom Koordinatenanfang nach dem Punkt xy gezogenen Strahl zum Durchmesser hat.

Um nun die expliciten Formeln zu erhalten, müssen wir die drei Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 - x x_1 - y y_1 = 0,$$
$$-x_1 - p y_1 = 0,$$
$$2 x_1 - x + p_1 (2 y_1 - y) = 0$$

auflösen und erhalten

$$x_1 = \frac{-p(y - xp)}{1 + p^2},$$
$$y_1 = \frac{y - xp}{1 + p^2},$$
$$p_1 = \frac{x + 2py - xp^2}{y - 2px - yp^2}.$$

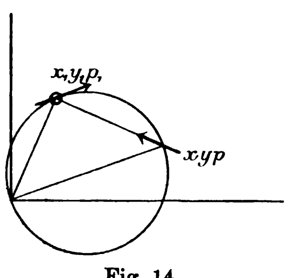


Fig. 14.

Der Name „Fußpunkttransformation“ drückt die folgende Eigenschaft der Transformation aus: Einem Linienelement xyp wird dasjenige Linienelement des dem Punkt xy entsprechenden Kreises zugeordnet, dessen Träger der Fußpunkt des vom Koordinatenanfang auf die Gerade des Linienelementes gefällten Lotes ist (vgl. Fig. 14).

Für diesen Fußpunkt bekommt man in der That die Koordinaten:

$$x_1 = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{(xp-y)}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{-p(y-xp)}{1+p^2},$$

$$y_1 = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{(xp-y)}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y-xp}{1+p^2}.$$

7. **Die Dilatation.** Als letztes Beispiel sei die durch die charakteristische Gleichung

$$\Omega = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - 1$$

definirte Berührungstransformation erwähnt.

Jedem Punkt (x, y) wird ein Kreis von Radius 1 zugeordnet, der diesen Punkt zum Mittelpunkt hat. Der Punkt x, y erweitert sich also gewissermaßen zu einem Kreis.

Löst man die Gleichungen

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - 1 = 0,$$
$$(x_1 - x) - p(y_1 - y) = 0,$$
$$(x_1 - x) + p_1(y_1 - y) = 0$$

auf, so kommt

$$x_1 = x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$
$$y_1 = y + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$
$$p_1 = p.$$

Jedes Linienelement wird also parallel mit sich und senkrecht gegen seine Richtung um die Strecke 1 verschoben.

§ 16. Der Klammerausdruck.

1. **Der Klammerausdruck und die Klammerrelation.** Wenn die Gleichungen der Berührungstransformation in aufgelöster Form vorliegen:

$$x_1 = X(x, y, p),$$
$$(1) \qquad y_1 = Y(x, y, p),$$
$$p_1 = P(x, y, p),$$

so sind die Funktionen X, Y, P nicht ganz beliebig. Sie müssen vielmehr gewisse Relationen erfüllen, welche wir jetzt ableiten wollen.

Die Gleichungen

$$x_1 = X(x, y, p),$$
$$y_1 = Y(x, y, p)$$

müssen, wie auch die Konstanten x_1 und y_1 gewählt sind, einen Elementverein definieren, da ja

$$x_1 = a_1,$$
$$y_1 = b_1$$

einen Elementverein definiert und jedem Elementverein ein Elementverein entspricht.

Hieraus folgt, daß die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial p}\frac{dp}{dt} = 0,$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial y}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial p}\frac{dp}{dt} = 0$$

die Gleichung

$$\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = 0$$

zur Folge haben müssen, d. h. es muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial p} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial p} \\ -p & +1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial p}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} + p\frac{\partial y_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial y_1}{\partial p}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} + p\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)$$

verschwinden.

Man nennt den Ausdruck

$$[X, Y] = \frac{\partial X}{\partial p}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p\frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{\partial Y}{\partial p}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

den Klammerausdruck der beiden Funktionen. Wir wollen von zwei Funktionen, deren Klammerausdruck verschwindet, sagen: Sie liegen in Involution oder sie sind Berührungsparameter. Führt man diese Bezeichnung ein, so läßt sich das erhaltene Resultat so aussprechen:

Damit die Gleichungen (1) *eine Berührungstransformation definieren, müssen X und Y in Involution liegen.*

Für die Größe p_1 bekommt man dann noch aus den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} + p\frac{\partial y_1}{\partial y}\right) - p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} + p\frac{\partial x_1}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial p} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial p} = 0$$

den Wert

$$p_1 = \frac{\alpha\frac{\partial y_1}{\partial p} + \beta\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} + p\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)}{\alpha\frac{\partial x_1}{\partial p} + \beta\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} + p\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)},$$

welcher von α und β unabhängig ist, weil die Determinante

$$\frac{\partial y_1}{\partial p}\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}+p\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial x_1}{\partial p}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}+p\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)$$

verschwindet.

Man kann dafür einfach schreiben

$$p_1=\frac{\frac{\partial y_1}{\partial p}}{\frac{\partial x_1}{\partial p}} \quad \text{oder} \quad p_1=\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x}+p\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\frac{\partial x_1}{\partial x}+p\frac{\partial x_1}{\partial y}},$$

wofern nur in der ersten Formel nicht $\frac{\partial y_1}{\partial p}$ und $\frac{\partial x_1}{\partial p}$ beide identisch verschwinden, oder in der zweiten Formel die Größen

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}+p\frac{\partial y_1}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_1}{\partial x}+p\frac{\partial x_1}{\partial y}.$$

2. **Die Klammerrelation bei den einzelnen Arten von Berührungstransformationen.** Wir wollen jetzt nachweisen, daß bei den verschiedenen Berührungstransformationen, welche wir aufgestellt haben, wirklich die Klammerrelation besteht.

Bei den Punkttransformationen besteht sie jedenfalls; denn es sind X und Y frei von p, also verschwindet $[X, Y]$ identisch. Es ist auch

$$p_1=\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x}+p\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\frac{\partial x_1}{\partial x}+p\frac{\partial x_1}{\partial y}} \quad \text{(nach § 15, 2)}.$$

Auch für diejenigen Berührungstransformationen, welche durch eine charakteristische Gleichung definiert sind, ist der Satzleicht zu beweisen.

Wir brauchen zu diesem Zweck nur die Gleichungen

$$\Omega(x, y, x_1, y_1)=0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}+p\frac{\partial \Omega}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}=0$$

und die aus der ersten durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}+\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial y}+\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p}+\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial p}=0$$

zu betrachten.

Setzt man an Stelle von $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ den Wert $-p\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ ein, so bekommt man drei lineare Gleichungen, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} -p & \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ 1 & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial x_1}{\partial p} & \frac{\partial y_1}{\partial p} \end{vmatrix} = -[X, Y]$$

verschwindet. Der Klammerausdruck verschwindet also.

Ferner ist, wie man leicht nachrechnet,

$$-\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}} = \frac{\alpha\frac{\partial y_1}{\partial p} + \beta\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} + p\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)}{\alpha\frac{\partial x_1}{\partial p} + \beta\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} + p\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)}$$

und andererseits

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}.$$

Also ist auch die zweite Forderung erfüllt.

3. **Zusammenhang mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Die Involutionsbeziehung hat noch eine andere Bedeutung, welche wir erwähnen wollen. Wenn die beiden Funktionen $X(x, y, p)$ und $Y(x, y, p)$ in Involution liegen, so stellen, wie wir gesehen haben, die Gleichungen

$$X(x, y, p) = a,$$
$$Y(x, y, p) = b$$

einen Elementverein dar, wie auch die Konstanten a und b gewählt sein mögen. Indem man nun diese Konstanten variieren läßt, erhält man eine zweigliedrige Schar von Elementvereinen.

Andererseits stellt die Gleichung

$$X(x, y, p) = a,$$

wenn man a beliebig variieren läßt, selbst eine zweigliedrige Schar von Elementvereinen dar, und entsprechend die Gleichung

$$Y(x, y, p) = b.$$

Diese beiden zweigliedrigen Scharen sind untereinander identisch, denn sie sind identisch mit der durch die beiden Gleichungen

$$X(x, y, p) = a,$$
$$Y(x, y, p) = b$$

zusammen definierten Schar.

Es müssen also die beiden Scharen von Differentialgleichungen

$$X(x, y, y') = a$$

und

$$Y(x, y, y') = b$$

dieselben Integralkurven haben, d. h. die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + y' \frac{\partial X}{\partial y} + y'' \frac{\partial X}{\partial y'} = 0$$

und

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + y' \frac{\partial Y}{\partial y} + y'' \frac{\partial Y}{\partial y'} = 0$$

müssen dieselben Integralkurven haben.

Dieses durch Überlegung gefundene Resultat können wir auch durch Rechnung bestätigen.

Aus der Involutionsbeziehung folgt direkt, daß die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial x} + y' \frac{\partial X}{\partial y} + y'' \frac{\partial X}{\partial y'} = 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} + y' \frac{\partial Y}{\partial y} + y'' \frac{\partial Y}{\partial y'} = 0$$

miteinander verträglich sind, d. h. daß sie beide denselben Wert von y'' bestimmen. Sie definieren also beide dieselbe zweigliedrige Kurvenschar.

Man nennt nun eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$X(x, y, y') = a,$$

welche differenziiert eine bestimmte Gleichung zweiter Ordnung ergiebt, intermediäres Integral dieser Gleichung zweiter Ordnung.

Mit Benutzung dieser Bezeichnung drückt sich das gewonnene Resultat so aus:

Wenn die beiden Funktionen $X(x, y, p)$ und $Y(x, y, p)$ in Involution liegen, sind sie intermediäre Integrale derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Beispiel: Es liegen in Involution die beiden Funktionen

$$X = -p \quad \text{und} \quad Y = xp - y$$

und man erhält durch Differentiation von

$$X = -y' = a$$

die Gleichung

$$-y'' = 0.$$

Ebenso bekommt man durch Differentiation von $xy' - y = b$

$$xy'' = 0.$$

Die beiden Funktionen sind also intermediäre Integrale von

$$y'' = 0.$$

4. **Konstruktion einer Berührungstransformation aus Berührungsparametern.** Sind zwei intermediäre Integrale (X und Y) einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben, so kann man leicht eine Berührungstransformation konstruieren von der Form

$$x_1 = X(x, y, p),$$
$$y_1 = Y(x, y, p),$$
$$p_1 = P(x, y, p).$$

Aus der Involutionsbeziehung folgt ja, daß die beiden Gleichungen

$$X(x, y, p) = a,$$
$$Y(x, y, p) = b$$

einen Elementverein definieren, wie auch die Konstanten a und b gewählt sein mögen.

Die Größe p_1 hat dann den Wert

$$p_1 = \frac{\alpha \frac{\partial Y}{\partial p} + \beta\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p\frac{\partial Y}{\partial y}\right)}{\alpha \frac{\partial X}{\partial p} + \beta\left(\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial y}\right)},$$

der, wie wir schon wissen, von α und β unabhängig ist.

Wegen dieser Eigenschaft, daß man mit Hilfe von zwei intermediären Integralen $X(x, y, p)$ und $Y(x, y, p)$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Berührungstransformation konstruieren kann, nennt man die Funktionen X und Y Berührungsparameter.

§ 17. Anwendung auf Differentialgleichungen.

1. **Transformation von Differentialgleichungen.** Wir sind nun im Stande, die gewonnenen Resultate über Berührungstransformationen für die Integrationstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwenden. Dabei soll das Integrationsproblem in dem verallgemeinerten Sinne verstanden werden; es sollen also alle möglichen Elementvereine bestimmt werden, deren Elemente

einer zweigliedrigen, durch eine Gleichung zwischen x, y und p gegebenen Schar angehören.

Wendet man eine Berührungstransformation an, so geht die gegebene zweigliedrige Schar von Elementen wieder in eine zweigliedrige Schar von Elementen über (§ 3, 3). Jeder Elementverein geht überdies wieder in einen Elementverein über.

Hieraus folgt aber der Satz:

Wendet man auf eine Differentialgleichung erster Ordnung eine Berührungstransformation an, so gehen die Integralgebilde der gegebenen Gleichung in die Integralgebilde der transformierten Gleichung über.

2. **Transformation in eine integrable Form.** Hieraus ergiebt sich ein Mittel, viele Gleichungen sofort zu integrieren. Es kann ja der Fall sein, daß man eine Berührungstransformation kennt und angeben kann, welche die gegebene Differentialgleichung in eine andere überführt, deren Integralgebilde bekannt sind. Diese bekannten Integralgebilde braucht man dann nur zu transformieren mit Hilfe der zur gegebenen Berührungstransformation inversen Berührungstransformation, um die Integralgebilde der gegebenen Gleichung zu erhalten.

Eine solche einfache integrable Form ist z. B. die Form

$$x = 0$$

oder auch

$$y = \varphi(x).$$

Hier sind die Integralgebilde einfach die Punkte der Kurve

$$y = \varphi(x).$$

3. **Die CLAIRAUT'sche Gleichung.** Wir wollen diese Betrachtungen anwenden auf die CLAIRAUT'sche Gleichung

$$y' - \varphi(xy' - y) = 0,$$

oder

$$p - \varphi(xp - y) = 0.$$

Hier wenden wir nun die LEGENDRE'sche Transformation an

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = xp - y,$$
$$p_1 = -x.$$

Durch dieselbe geht die gegebene Gleichung über in

$$x_1 + \varphi(y_1) = 0.$$

Von dieser Differentialgleichung kennen wir aber die Integralgebilde: Es sind die Punkte der durch die Gleichung dargestellten Kurve.

Zu diesen Integralgebilden kommt noch als Umhüllungsgebilde die Kurve selbst hinzu.

Indem man jetzt die inverse Transformation ausführt, gelangt man zu den Vereinen

$$x = -p_1 = \frac{1}{\varphi'(y_1)},$$

$$y = x_1 p_1 - y_1 = -y_1 + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)},$$

$$p = -x_1 = \varphi(y_1).$$

Diese Kurven sind gerade Linien

$$y = -a + x\varphi(a),$$

welche als Umhüllungsgebilde die Kurve einschließen, deren Gleichung man durch Elimination von a aus

$$y = -a + x\varphi(a)$$

und

$$1 - x\varphi'(a) = 0$$

erhält. Dieser Umhüllungskurve, d. h. dem Elementverein

$$1 - x\varphi'(a) = 0,$$

$$y + a - x\varphi(a) = 0,$$

$$p - \varphi(a) = 0$$

entspricht die Kurve

$$1 + p_1\varphi'(a) = 0,$$

$$x_1 p_1 - y_1 + a + p_1\varphi(a) = 0,$$

$$-x_1 - \varphi(a) = 0$$

oder

$$y_1 - a = 0,$$

d. h.

$$\varphi(y_1) = \varphi(a) = -x_1$$

oder

$$\varphi(y_1) + x_1 = 0.$$

Dies stimmt mit den früheren Betrachtungen (§ 15, 1): Dem Umhüllungsgebilde

$$x_1 + \varphi(y_1) = 0$$

entspricht das Umhüllungsgebilde der den Punkten entsprechenden Geraden.

Um einen speziellen Fall zu betrachten, wollen wir

$$\varphi(xp - y) = \frac{xp - y}{\sqrt{1 - (xp - y)^2}}$$

setzen. Dann sind die Integralkurven gegeben durch

$$y + a - x \cdot \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = 0.$$

Es sind dies gerade Linien, welche die Eigenschaft haben, daß das von ihnen durch die Koordinatenaxen abgeschnittene Stück

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(\sqrt{1 - a^2})^2 + a^2}$$

die Länge 1 hat.

Das Umhüllungsgebilde dieser Geraden ist gegeben durch die Gleichungen

$$x = (1 - a^2)^{\frac{3}{2}},$$
$$y = -a + a(1 - a^2) = -a^3$$

oder durch die eine Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

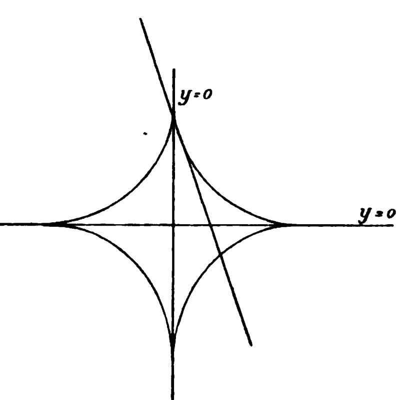


Fig. 15.

Die spezielle Clairaut'sche Gleichung

$$p - \frac{(xp - y)}{\sqrt{1 - (xy - y)^2}} = 0$$

definiert also gerade Linien, aus denen die Koordinatenaxen ein Stück von der Länge 1 ausschneiden, und welche die durch die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

gegebene (sternförmige) Kurve umhüllen.

4. **Gleichungen zwischen Berührungsparametern.** Die Clairaut'sche Gleichung ist nur ein Beispiel einer viel allgemeineren Klasse von Gleichungen, welche sich leicht integrieren lassen.

Es sind dies die Gleichungen von der Form

$$X(x, y, p) = \varphi\left(Y(x, y, p)\right),$$

wo zwischen X und Y die Beziehung besteht

$$[X, Y] = 0.$$

In diesem Falle kann man nämlich (nach § 16, 4) eine Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, p),$$
$$y_1 = Y(x, y, p),$$
$$p_1 = P(x, y, p)$$

konstruieren, welche die Gleichung

$$X(x,y,p) = \varphi\left(Y(x,y,p)\right)$$

überführt in die unmittelbar integrable Gleichung

$$x = \varphi(y).$$

Jede Gleichung zwischen Berührungsparametern kann man also unmittelbar integrieren.

Diese Integration geschieht dadurch, daß man aus den beiden Gleichungen

$$X(x,y,p) = \varphi(a),$$
$$Y(x,y,p) = a,$$

welche immer einen Elementverein darstellen, die Größe p eliminiert.

Beispiel: Da die Funktionen

$$X(x,y,p) = x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$
$$Y(x,y,p) = y + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

Berührungsparameter sind, so kann man die Gleichung

$$x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = y + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

integrieren, indem man aus

$$x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = y + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = c$$

die Größe c eliminiert.

Diese Elimination führt auf die Gleichung

$$(x-c)^2 + (y-c)^2 = 1.$$

Demnach ist die Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$y = c - \sqrt{1-(x-c)^2}.$$

(Die negative Wurzel ist zu nehmen, weil für $y' = 0$ die beiden Bedingungen $x = c$, $y = c - 1$ erfüllt sein sollen.)

Man kann dies leicht verifizieren: Es wird

$$y' = \frac{+(x-c)}{\sqrt{1-(x-c)^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{1-(x-c)^2}, \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - c,$$

also

$$x - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

und ebenso

$$y + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c - \sqrt{1-(x-c)^2} + \sqrt{1-(x-c)^2} = c.$$

Also haben wir hier wirklich durch das angegebene Eliminationsverfahren (ohne daß wir eine Integration auszuführen brauchten!) die Lösung gefunden.

5. **Die verallgemeinerte CLAIRAUT'sche Gleichung.** Bei den Gleichungen zwischen Berührungsparametern ergab sich die Integration durch Transformation in die einfache Form

$$x = \varphi(y).$$

Eine andere Möglichkeit der Integration bietet sich, wenn es gelingt, eine Berührungstransformation anzugeben, durch welche die gegebene Differentialgleichung in eine einfachere übergeht, z. B. in eine lineare. Hierhin gehört die verallgemeinerte CLAIRAUT'sche Gleichung

$$x - y f(p) - \varphi(p) = 0,$$

welche durch die LEGENDRE'sche Transformation übergeht in

$$-p_1 - (x_1 p_1 - y_1) f(-x_1) - \varphi(-x_1) = 0$$

oder

$$p_1 = \frac{y_1 f(-x_1)}{(1 + x_1 f(-x_1))} - \frac{\varphi(-x_1)}{(1 + x_1 f(-x_1))},$$

also in eine lineare Differentialgleichung.

Beispiel: Gegeben sei die Gleichung

$$x - \frac{2y}{p} - p^2 = 0.$$

Durch Anwendung der LEGENDRE'schen Transformation erhält man hieraus

$$p_1 = \frac{2y_1}{x_1} - x_1^2 = 0.$$

Von dieser Gleichung ist die Lösung

$$y_1 = c x_1^2 + x_1^3.$$

Wendet man nun auf die Formeln

$$y_1 = c_1 x_1^2 + x_1^3,$$
$$p_1 = 2 c_1 x_1 + 3 x_1^2$$

wieder die LEGENDRE'sche Transformation an, so kommt

$$xp - y = cp^2 - p^3,$$
$$-x = -2cp + 3p^2.$$

Durch Auflösung erhält man

$$x = 2cp - 3p^2,$$
$$y = cp^2 - 2p^3.$$

Man kann leicht nachweisen, daß diese Gleichungen die Lösung der gegebenen Differentialgleichung darstellen.

In der That folgt aus ihnen

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}:\frac{dx}{dp}=\frac{2cp-6p^2}{2c-6p}=p;$$

ferner aber ist

$$x-\frac{2y}{p}-p^2=2cp-3p^2-\frac{2(cp^2-2p^3)}{p}-p^2=0.$$

6. **Die Fußpunktkurven von Kreisen.** Wir wollen auf die Differentialgleichung

$$y'\left(y(x^2+y^2)+xy\right)+x(x^2+y^2)-y^2=0$$

die Transformation

$$x=-\frac{p_1(y_1-x_1p_1)}{1+p_1^2},$$

$$y=\frac{y_1-x_1p_1}{1+p_1^2},$$

$$p=\frac{x_1+2p_1y_1-x_1p_1^2}{y_1-2x_1p_1-y_1p_1^2}$$

anwenden, welche zur Fußpunkttransformation (§ 15, 6) invers ist.

Durch Ausführung der Transformation erhält man:

$$(x_1+2p_1y_1-x_1p_1^2)(y_1-x_1p_1-p_1)-(y_1-2x_1p_1-y_1p_1^2)(p_1(y_1-x_1p_1)+1)$$
$$=(y_1-x_1p_1)(1+p_1^2)(x_1+y_1p_1-1).$$

Die der gegebenen Gleichung entsprechende erhält man, indem man einen dieser drei Faktoren gleich Null setzt. Man darf weder den ersten noch den zweiten Faktor nehmen, denn die Gleichung

$$y_1-x_1p_1=0$$

führt auf

$$x=y=0$$

und die Gleichung

$$1+p_1^2=0$$

auf

$$x=y=\infty.$$

Die Gleichung

$$x_1+y_1p_1-1=0$$

kann man sofort integrieren und erhält die Gleichung:

$$y_1=\sqrt{c-(x_1-1)^2}.$$

Diese Gleichung stellt konzentrische Kreise dar mit dem gemeinsamen Mittelpunkt

$$x_1=1,\quad y_1=0.$$

Wenn man nun wieder die inverse Transformation — also die Fußpunkttransformation — ausführt, erhält man die Integralkurven der gegebenen Gleichung.

Die gegebene Gleichung stellt also die Fußpunktkurven der Kreise mit dem Mittelpunkt $x = 1$ $y = 0$ dar.

Wir können auch die Gleichung der Integralkurven der gegebenen Gleichung erhalten, indem wir in den Transformationsgleichungen einsetzen

$$y_1 = \sqrt{c - (x_1 - 1)^2},$$

$$p_1 = \frac{1 - x_1}{\sqrt{c - (x_1 - 1)^2}}.$$

Es kommt dann

$$x = \frac{(1 - x_1)(1 - x_1 - c)}{c},$$

$$y = \sqrt{c - (1 - x_1{}^2)} \cdot \frac{(c + x_1 - 1)}{c}.$$

Diese Gleichungen geben also eine Darstellung der genannten Kurvenschar. Erteilt man der Konstanten c einen bestimmten Wert, während man x_1 variieren läßt, so erhält man eine bestimmte Kurve aus dieser Schar.

§ 18. Die singulären Lösungen.

1. **Über die Möglichkeit singulärer Lösungen.** In dem Existenzbeweis für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen haben wir auch den Fall der impliciten Differentialgleichung $f(x,y,y') = 0$ besprochen. Dabei war zum Beweis der Existenz der Lösung notwendig, daß der Differentialquotient

$$\frac{\partial f}{\partial y'}$$

an der betrachteten Stelle von Null verschieden ist (§ 8, 1).

Es giebt nun aber Lösungen von impliciten Differentialgleichungen, für die dieser Differentialquotient verschwindet. Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung

$$f(x,y,y') = 4y - y'^2 = 0,$$

so lautet die allgemeine Lösung

$$y - (x - a)^2 = 0.$$

Es ist nämlich

$$y' = 2(x - a)$$

und

$$4y - y'^2 = 4(x-a)^2 - 4(x-a)^2 = 0.$$

Für diese Lösung ist außerdem

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -2y' = -4(x-a),$$

also von Null verschieden (wenn nicht gerade $x = a$ ist).

Außer dieser allgemeinen Lösung aber existiert noch die Lösung

$$y = 0.$$

Für diese Lösung ist

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -2y' = 0.$$

Wir haben also eine Lösung, *deren Existenz mit Hilfe des früheren Existenztheorems nicht nachgewiesen werden kann.* Solche Lösungen wollen wir *singuläre Lösungen* nennen.

Die Frage nach den singulären Lösungen ist nicht nur der Vollständigkeit wegen wichtig, sie muß nicht allein deswegen aufgeworfen werden, weil das Integrationsproblem es erfordert, alle Lösungen zu finden; sie ist vielmehr auch deswegen wichtig, weil bei einigen Differentialgleichungen nur die singuläre Lösung die einzige interessante ist.

Stellen wir uns z. B. die Aufgabe, diejenige Kurve zu bestimmen, welche die Eigenschaft hat, daß die Koordinatenaxen aus jeder Tangente ein Stück ausschneiden, dessen Länge gleich ist der Längeneinheit, so kommen wir auf die Clairaut'sche Gleichung

$$p^2\left(1-(xp-y)^2\right) - (xp-y)^2 = 1.$$

Die allgemeine Lösung lautet (vgl. § 17, 3)

$$y + a - \frac{xa}{\sqrt{1-a^2}} = 0$$

und definiert jene Geraden. Die eigentlich interessante Lösung ist aber das Umhüllungsgebilde der Geraden, nämlich die Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Für diese Lösung verschwindet aber der Ausdruck:

$$\frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 2\left\{p\left(1-(xp-y)^2\right) - p^2 x(xp-y) - x(xp-y)\right\}$$

$$= 2\left\{(xp-y)\{-2xp^2 + py - x\} + p\right\}.$$

Denn setzt man hierin die Werte

$$x = (1-t^2)^{+\frac{3}{2}}, \qquad y = t^3, \qquad p = -t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ein, so kommt

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Bei dieser Differentialgleichung ist also gerade die eigentlich gesuchte Lösung singulär.

2. **Rationale irreducible Differentialgleichungen.** Bei der Frage nach den singulären Lösungen wollen wir uns auf solche Gleichungen beschränken, bei denen die Funktion $f(x, y, y')$ eine ganze rationale Funktion ihrer Argumente ist. Überdies soll diese Funktion irreducibel sein; d. h. die Funktion soll nicht für alle Werte von x, y und y' sich in Faktoren zerlegen lassen.

Ausgeschlossen ist daher z. B. eine Gleichung von der Form

$$y'^2 - (x - y)^2 = 0.$$

Denn diese Gleichung läßt sich schreiben

$$\{y' - (x - y)\} \cdot \{y' + (x - y)\} = 0$$

und das Integrationsproblem kommt darauf hinaus, entweder die Gleichung

$$y' - (x - y) = 0$$

oder die Gleichung

$$y' + (x - y) = 0$$

zu integrieren.

Die Gleichung

$$y'^3 - (x - y)^2 = 0$$

dagegen gehört mit zu den betrachteten Gleichungen, denn sie läßt sich nicht, wenn x, y und y' beliebige Werte haben, in ganze Funktionen zerlegen.

3. **Bestimmung der singulären Lösungen.** Aus der Definition der singulären Lösung ergiebt sich die folgende Regel zur Bestimmung derselben:

Man berechne aus

$$f(x, y, y') = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

y und y' als Funktionen von x. Erfüllen die erhaltenen Lösungen

$$y = \varphi(x),$$
$$y' = \varphi_1(x)$$

auch noch die Bedingung

$$\varphi'(x) = \varphi_1(x),$$

so ist $y = \varphi(x)$ eine singuläre Lösung.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach: Weil nämlich

$$f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

ist, so ist die erhaltene Funktion eine Lösung, und weil

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1(x)} = 0$$

ist, so ist diese Lösung singulär.

Die Bedingung

$$\varphi'(x) = \varphi_1(x)$$

läßt sich häufig durch eine andere Bedingung ersetzen.

Es ist nämlich

$$f(x, \varphi, \varphi_1) = 0$$

und daher auch

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \varphi_1' \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = 0$$

und außerdem $\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = 0$. Hieraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

Ist also

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

so ist $\varphi_1 = \varphi'$, wir haben eine singuläre Lösung, wenn nicht etwa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

ist. Dann nämlich würde die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

die Funktion φ gar keiner Bedingung unterwerfen.

Hieraus folgt also das Resultat:

Bestimmen die beiden Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

y und y' als Funktionen von x

$$y = \varphi(x), \qquad y' = \varphi_1(x),$$

so stellt $y = \varphi(x)$ sicher dann eine singuläre Lösung dar, wenn noch

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_1(x) \frac{\partial f}{\partial y}$$

verschwindet und die beiden Differentialquotienten nicht auch gleichzeitig verschwinden.

Man sieht übrigens hieraus noch, daß eine Differentialgleichung der genannten Form im allgemeinen keine singuläre Lösung hat, da die drei Gleichungen

$$f = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

im allgemeinen keine gemeinsamen Lösungen von der Form

$$y = \varphi(x),$$
$$y' = \varphi_1(x)$$

haben werden.

4. **Beispiele von singulären Lösungen.**

1) $4y - y'^2 = 0.$

Hier ist für $y = 0$ und $y' = 0$ auch $\frac{\partial f}{\partial y'} = -2y' = 0.$

Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 4y' = 0.$$

ohne daß $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ beide verschwinden. $y = 0$ ist also eine singuläre Lösung.

2) $y'^3 + x - y = 0.$

Aus

$$f(x, y, y') = y'^3 + x - y = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 3y'^2 = 0$$

folgt

$$y' = 0, \qquad x - y = 0.$$

Dagegen ist die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

nicht erfüllt, also ist

$$y = x$$

keine singuläre Lösung. Man hätte dies auch direkt daraus ersehen können, daß die beiden Gleichungen

$$y' = 0$$

und

$$y = x$$

sich widersprechen.

3) $y'^3 - 27y = 0$.

Das angegebene Verfahren führt auf die Gleichungen

$$3y'^2 = 0$$

und wir erhalten die singuläre Lösung

$$y = 0\,(y' = 0).$$

Das zweite Kriterium

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

würde hier die Entscheidung nicht geben können, da für $x = 0$ sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ wie $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwindet.

4) $y'^3 - (y - x)^2 = 0$.

Hier liefern die Gleichungen

$$y'^3 - (y - x)^2 = 0$$

und

$$3y'^2 \left(= \frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

das Resultat

$$y = x, \quad y' = 0,$$

was keine singuläre Lösung darstellt, da die Gleichungen

$$y = x \quad \text{und} \quad y' = 0$$

sich widersprechen.

Übrigens ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = x.$$

Man kann also hier das zweite Kriterium ebenfalls nicht anwenden.

5. **Die singulären Lösungen als Enveloppen.** Die singulären Lösungen haben eine einfache geometrische Bedeutung.

Wir wollen die Enveloppe der Schar der Integralkurven

$$y = \varphi(x, a)$$

der gegebenen Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

bestimmen, welche eine singuläre Lösung hat, für die $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht beide verschwinden.

Man erhält bekanntlich die Enveloppe durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen

$$y - \varphi(x, a) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0.$$

Andererseits ist, wenn man $y = \varphi(x, a)$, $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ setzt,

$$f(x, y, y') = 0$$

und daher auch

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial a} = 0.$$

Wenn also $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ ist, so ist auch $\frac{\partial y}{\partial a} = 0$. (Der Faktor $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwindet nicht, wie wir annehmen wollen; denn der Fall, daß $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, läßt sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems vermeiden.) Hieraus folgt also, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Enveloppe mit der singulären Lösung identisch ist, weil sie eine Lösung ist, für welche die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ erfüllt ist.

6. **Beispiele:**

1) $y - y'^2 = 0$.

Die Integralkurven sind die durch die Gleichung

$$y = (x - a)^2$$

dargestellten Parabeln. Diese Parabeln berühren alle die x-Axe, denn es ist für $y = 0\,(x = a)$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x - a) = 0,$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = -2(x - a) = 0.$$

Wir haben auch schon bewiesen, daß die y-Axe wirklich die singuläre Lösung darstellt (s. Fig. 11).

2) $y'^3 - \frac{27}{8} y = 0$.

Hier lautet die allgemeine Lösung

$$y = (x - a)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Integralkurven sind also semikubische Parabeln, welche die y-Axe berühren; denn für $y = 0$ ist $x = a$ und

Fig. 16.

$$y' = \tfrac{3}{2}(x - a)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Die y-Axe ist also Enveloppe der Integralkurven. Wir haben auch früher festgestellt, daß sie die singuläre Lösung ist (vgl. Fig. 16).

3) $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y = a(x - a)^2,$$

und die Gleichungen

$$y = a(x - a)^2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = (x - a)^2 - 2a(x - a) = 0$$

geben die beiden Enveloppen

$$y = 0$$

und

$$y = \frac{4x^3}{27}.$$

Ebenso wird man durch Elimination von y' aus

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$

und

$$3y'^2 - 4xy = 0$$

entweder auf $y = y' = 0$ oder auf

$$y' = 2\left(\frac{xy}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$0 = y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = -2y'^3 + 8y^2,$$

d. h.

$$(y')^3 = 4y^2$$

oder

$$(y')^6 = 16y^4,$$

$$\frac{64(xy)^3}{27} = 16y^4,$$

$$y = \frac{4x^3}{27}$$

geführt. Bei dieser Differentialgleichung ist es interessant, daß man die eine singuläre Lösung

$$y = 0$$

auch dadurch erhalten kann, daß man der Integrationskonstanten a den Wert Null erteilt.

7. **Die Wendepunkte der Integralkurven.** Sind die drei Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

gleichzeitig längs einer Integralkurve erfüllt, so ist (wenn nicht $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ auch noch verschwinden) diese Kurve sicher eine Enveloppe und singuläre Lösung.

Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen nach der Bedeutung der Kurve, längs deren die beiden Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

erfüllt sind.

Wegen der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

ist dann

$$y'' = 0.$$

Sind also die beiden Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

erfüllt, während $\frac{\partial f}{\partial y'}$ von Null verschieden ist, so verschwindet auch y'', d. h. die Integralkurve hat einen Wendepunkt (im allgemeinen). Der Zusatz „im allgemeinen" ist deshalb notwendig, weil möglicherweise auch y''' verschwinden könnte und der Punkt dann kein Wendepunkt mehr zu sein braucht.

8. **Die Spitzen der Integralkurven.** Die Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

definieren auch eine Kurve, welche der Ort derjenigen Punkte ist, in denen die Integralkurven gewisse Singularitäten haben. Um zu sehen, welche Singularitäten dies sind, wenden wir die Legendre'sche Transformation an.

Durch dieselbe geht

$$f(x, y, p) = 0$$

über in

$$f_1(x_1, y_1, p_1) = f(-p_1, x_1 p_1 - y_1, -x_1) = 0.$$

Wenn nun

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

ist, so ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial p}+\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial p}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-p_1\frac{\partial f}{\partial y_1}=0.$$

Die beiden Gleichungen

$$f_1(x_1,y_1,p_1)=0$$

und

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=0$$

geben aber den Ort der Wendepunkte der Integralkurven von

$$f_1(x_1,y_1,y_1')=0$$

an. Um also die Bedeutung der beiden Gleichungen

$$f(x,y,y')=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

zu erkennen, brauchen wir nur zu untersuchen, wie sich die Wendepunkte einer Kurve bei der LEGENDRE'schen Transformation abbilden.

Untersuchen wir zu diesem Zweck die Kurve

$$y=-x^3+\ldots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von mindestens vierter Ordnung sind.

Wir haben dann noch

$$p=-3x^2+\ldots.$$

Durch die LEGENDRE'sche Transformation erhält man

$$x_1p_1-y_1=+p_1^3+\ldots,$$
$$-x_1=-3p_1^2+\ldots,$$
$$-p_1=x,$$

d. h.

$$x_1=+3p_1^2+\ldots,$$
$$y_1=-p_1^3+3p_1^3+\ldots 2p_1^3+\ldots.$$

Für $p_1=0$ ist also

$$\frac{dx_1}{dp_1}=0 \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dp_1}=0,$$

d. h. die transformierte Kurve hat eine Spitze, deren Tangente die x-Axe ist. Dem Wendepunkt entspricht also eine Spitze, und hieraus folgt der Satz, daß (im allgemeinen) die beiden Gleichungen

$$f(x,y,y')=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

den *Ort der Spitzen der Integralkurven* definieren.

9. **Beispiel.** Gegeben sei die Gleichung

$$f(x, y, y') = y'^2 + x^2 - 1 = 0.$$

Die Integralkurven haben die Gleichung

$$y = c + \tfrac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x).$$

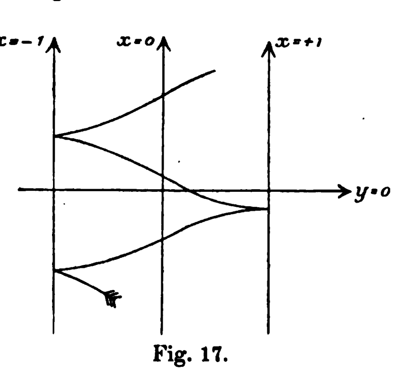


Fig. 17.

Sie haben Spitzen auf den beiden Geraden $x = \pm 1$ und Wendepunkte auf der Geraden $x = 0$ (s. Fig. 17).

In der That ist auch für $x = \pm 1$ und $y' = 0$

$$f(x, y, y') = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' = 0.$$

Entsprechend hat man für $x = 0$ und $y' = \pm 1$

$$f(x, y, y') = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = 0.$$

Beide Resultate sind in Einklang mit den abgeleiteten Sätzen.

§ 19. Die singulären Punkte.

1. **Definition der singulären Stellen.** Wir haben schon in § 18 das Verhalten der Lösungen an solchen Stellen untersucht, wo der Existenzbeweis seine Gültigkeit verliert. Es waren das bei den impliciten Differentialgleichungen diejenigen Wertsysteme x, y, für welche die Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

gleichzeitig erfüllt waren.

Wir wollen jetzt andere Singularitäten untersuchen, welche sich

dadurch ergeben, daß die beiden analytischen Funktionen $X(x,y)$ und $Y(x,y)$, welche als Koeffizienten in der Differentialgleichung

$$X(x,y)\,y' - Y(x,y) = 0$$

auftreten, gleichzeitig verschwinden. Das Koordinatensystem wollen wir verschieben, so daß die singuläre Stelle mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt.

Die Differentialgleichung hat dann also die Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y + \ldots}{a_1 x + b_1 y + \ldots}.$$

Um das Verhalten der Integralkurven in der Nähe des Koordinatenanfangs zu untersuchen, begnügen wir uns mit der Untersuchung eines einfachen Falles, nämlich der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_1 x + b_1 y}.$$

2. **Normierung der Differentialgleichung.** Um die Differentialgleichung

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_1 x + b_1 y}$$

zu untersuchen, wenden wir eine lineare homogene Transformation an:

$$x_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y,$$
$$y_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y,$$

mit Hilfe deren wir die Differentialgleichung auf die einfache Form

$$\frac{dy_1}{dx_1} = a\frac{y_1}{x_1} = \frac{\mu y_1}{\lambda x_1}$$

bringen wollen.

Die Bestimmungen der Koeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ gelingt am einfachsten, indem man für die gegebene gewöhnliche Differentialgleichung die äquivalente homogene, lineare, partielle Differentialgleichung erster Ordnung einsetzt (§ 4, 3), also die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 x + b_1 y) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_2 x + b_2 y) = 0.$$

Soll nun diese Gleichung durch die lineare homogene Substitution die Form

$$\lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

bekommen, so müssen die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}[\alpha_1(a_1 x + b_1 y) + \beta_1(a_2 x + b_2 y)] +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y_1}[\alpha_2(a_1 x + b_1 y) + \beta_2(a_2 x + b_2 y)] = 0$$

und

$$\lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

untereinander identisch sein.

D. h. also, es müssen die Relationen bestehen:

$$\alpha_1 (a_1 x + b_1 y) + \beta_1 (a_2 x + b_2 y) = \lambda (\alpha_1 x + \beta_1 y),$$
$$\alpha_2 (a_1 x + b_1 y) + \beta_2 (a_2 x + b_2 y) = \mu (\alpha_2 x + \beta_2 y).$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt noch

$$\alpha_1 (a_1 - \lambda) + \beta_1 a_2 = 0,$$
$$\alpha_1 b_1 + \beta_1 (b_2 - \lambda) = 0,$$

und aus den letzten beiden

$$\alpha_2 (a_1 - \mu) + \beta_2 a_2 = 0,$$
$$\alpha_2 b_1 + \beta_2 (b_2 - \mu) = 0.$$

Damit man also wirklich eine Transformation erhält, müssen demnach λ und μ die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Sind nun die beiden Wurzeln von einander verschieden, so kann man die Größen α_1, α_2, β_1, β_2 so bestimmen, daß die Determinante

$$\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und hat also dann die Gleichung auf die Form

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\mu y_1}{\lambda x_1}$$

reduziert. Sind die beiden Wurzeln reell, so werden y_1 und x_1 auch reelle lineare Funktionen von x und y. Sind sie dagegen konjugiert imaginär, so werden auch y_1 und x_1 konjugiert imaginär.

Fallen die Wurzeln zusammen, so gelingt die soeben ausgeführte Reduktion nicht. Man kann dann aber folgendes Verfahren anwenden:

Zunächst bestimmt man α_1 und β_1 so, daß die Gleichung

$$\alpha_1 (a_1 x + b_1 y) + \beta_1 (a_2 x + b_2 y) = \lambda (\alpha_1 x + \beta_1 y)$$

erfüllt ist. Man kann hierauf α_2 und β_2 immer noch so bestimmen, daß die Gleichung

$$\alpha_2 (a_1 x + b_1 y) + \beta_2 (a_2 x + b_2 y) = \mu (\alpha_1 x + \beta_1 y) + \lambda (\alpha_2 x + \beta_2 y)$$

erfüllt ist. Es muß dann nämlich sein:

$$\alpha_2 (a_1 - \lambda) + \beta_2 a_2 = \mu \alpha_1 ,$$
$$\alpha_2 b_1 + \beta_2 (b_2 - \lambda) = \mu \beta_1 .$$

Hier kann man nun noch μ so bestimmen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Also erhält man:

$$\frac{d y_1}{d x_1} = \frac{\mu x_1 + \lambda y_1}{\lambda x_1} .$$

Hieraus erhält man, wenn man

$$x_1 = \lambda x_2$$
$$y_1 = \mu y_2$$

setzt, die Normalform

$$\frac{d y_2}{d x_2} = \frac{x_2 + y_2}{x_2} .$$

Die Reduktion läßt sich nur dann nicht durchführen, wenn

$$a_2 = b_1 = b_2 - a_1 = 0$$

ist.

Dann hat die Gleichung von vornherein die Form

$$\frac{d y}{d x} = \frac{y}{x} .$$

3. **Der Fall zweier verschiedener reeller Wurzeln.** Wir behandeln nun die verschiedenen Fälle der Reihe nach, und zwar zunächst die Normalform

$$\frac{d y}{d x} = a \frac{y}{x} ,$$

wo a eine positive Zahl und größer als 1 ist (ist a positiv und kleiner als 1, so braucht man, um auf unseren Fall zurückzukommen, nur x und y zu vertauschen).

Die Integralkurven sind dann gegeben durch die Gleichung

$$y = c \cdot x^a .$$

Sie gehen alle durch den Koordinatenanfang und berühren in ihm die x-Axe.

Außer diesen Kurven hat man also noch die x-Axe selbst (wenn man $c = 0$ setzt) und die y-Axe (wenn man $\frac{1}{c} = 0$ setzt) als Integralkurven (s. Fig. 18). Man nennt diese Punkte Knotenpunkte.

Ist das Verhältnis der Wurzeln negativ, so bekommt man die Integralkurven

$$y = c x^{-a}.$$

Das sind Kurven, welche die beiden Axen zu Asymptoten haben (für $a = -1$ bekommt man z. B. gleichseitige Hyperbeln). Die Axen selbst sind auch in diesem Fall Integralkurven, und zwar die

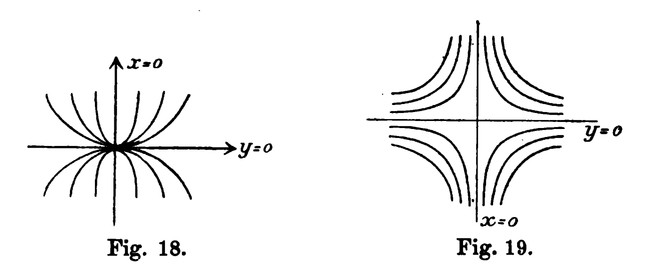


Fig. 18. Fig. 19.

einzigen, welche durch den Koordinatenanfang gehen. — Man nennt diese Singularität einen Sattelpunkt, weil die Horizontallinien auf einer Karte in der Nähe eines Gebirgssattels dieses Verhalten zeigen (s. Fig. 19).

4. **Zwei verschiedene imaginäre Wurzeln.** Hat die Gleichung die Form

$$\frac{d y_1}{d x_1} = \frac{\mu y_1}{\lambda x_1},$$

wo sowohl x_1 und y_1 wie μ und λ konjugiert imaginär sind, so setzt man

$$\lambda = a + i b, \quad x_1 = \xi + i \eta,$$

$$\mu = a - i b, \quad y_1 = \xi - i \eta,$$

wo jetzt a und b reelle Konstanten sind und ξ und η reelle lineare Funktionen von x und y. Durch diese Substitution erhält die Gleichung die Form

$$\frac{1 - i\dfrac{d\eta}{d\xi}}{1 + i\dfrac{d\eta}{d\xi}} = \frac{(a - i b)(\xi - i \eta)}{(a + i b)(\xi + i \eta)},$$

woraus man durch Umformung leicht erhält:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\eta + b\xi}{a\xi - b\eta}.$$

Auf der rechten Seite kann man noch mit b Zähler und Nenner

dividieren (da b von Null verschieden ist) und bekommt, indem man für $\frac{a}{b}$ einfach a setzt, die Normalform

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{ax - y}.$$

Die Integralkurven haben die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} - c\,e^{a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = 0,$$

oder, wenn man Polarkoordinaten einführt, indem man

$$x = \varrho \cos\varphi,$$
$$y = \varrho \sin\varphi$$

setzt, so erhält man

$$\varrho = c\,e^{a\varphi},$$

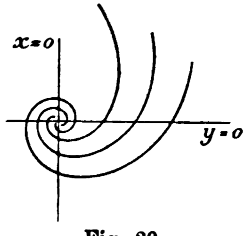


Fig. 20.

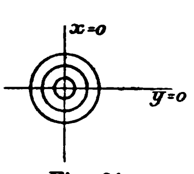


Fig. 21.

d. h. die Gleichung von logarithmischen Spiralen, welche sich dem Koordinatenanfang nähern. Eine solche Singularität bezeichnen wir als Strudelpunkt (s. Fig. 20).

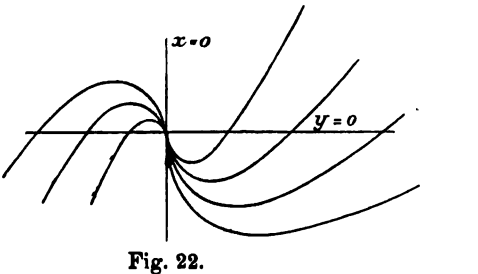


Fig. 22.

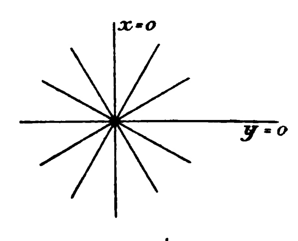


Fig. 23.

Ist $a = 0$, so werden aus den Spiralen Kreise, wir haben einen Wirbelpunkt (s. Fig. 21).

5. **Zusammenfallende Wurzeln.** Bei zusammenfallenden Wurzeln haben wir entweder die Normalform

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$$

und bekommen die Integralkurven

$$y = x(c + \log x),$$

welche im Koordinatenanfang die y-Axe berühren (s. Fig. 22), oder die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

In diesem Falle sind die Kurven gerade Linien durch den Koordinatenanfang (Fig. 23).

Drittes Kapitel.

Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

§ 20. Erweiterte Berührungstransformationen und gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. **Die Krümmungselementvereine.** In § 14 hatten wir das Integrationsproblem der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in folgender Weise formuliert: Es sollen alle Linienelementvereine gefunden werden, deren Elemente der durch eine Gleichung

$$f(x, y, p) = 0$$

definierten Schar angehören. Diese verallgemeinerte Auffassung des Integrationsproblems erwies sich als vorteilhaft bei der Anwendung von Berührungstransformationen. Ähnlich wollen wir jetzt den Begriff „Krümmungselement" einführen.

Unter einem Krümmungselement einer ebenen Kurve in einem Punkte verstehen wir den Inbegriff der vier Größen x, y, y', y''.

Mit Hilfe dieser vier Größen ist nämlich der Punkt der Kurve, die Tangente in diesem Punkte und der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

bestimmt; darauf deutet die Bezeichnung Krümmungselement.

Wir wollen y' mit p, y'' mit q bezeichnen und müssen dann die Krümmungselemente einer Kurve darstellen durch die Gleichungen:

$$y = f(x),$$
$$p = \frac{dy}{dx},$$
$$q = \frac{dp}{dx}.$$

Hier erfüllen nun x, y, p und q die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} - p\frac{dx}{dx} = 0,$$
$$\frac{dp}{dx} - q\frac{dx}{dx} = 0.$$

Wir wollen jetzt die folgende allgemeine Definition aufstellen: *Die Gleichungen*

$$x = x(t_1 \ldots t_k),$$
$$y = y(t_1 \ldots t_k),$$
$$p = p(t_1 \ldots t_k),$$
$$q = q(t_1 \ldots t_k)$$

stellen einen Krümmungselementverein dar, wenn die Relationen

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots k),$$
$$\frac{\partial p}{\partial t_i} - q\frac{\partial x}{\partial t_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots k)$$

erfüllt sind.

2. **Die verschiedenen Arten von Vereinen.** Wir können jetzt, ähnlich wie dies früher (§ 13, 4) bei den Linienelementen geschehen ist, auch die verschiedenen Klassen von Vereinen aufstellen, welche man aus Krümmungselementen bilden kann.

Bezeichnen wir das Linienelement xyp als den Träger des Krümmungselementes $xypq$, so gilt zunächst folgender Satz: *Die Linienelemente, welche die Träger der Krümmungselemente des Vereines sind, müssen selbst einen Verein von Linienelementen bilden* (wegen der Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} = 0),$$

wenn nicht etwa alle Elemente denselben Träger haben.

In diesem letzteren Falle ist also

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad p = p_0.$$

q kann beliebig gewählt werden; *alle Krümmungselemente, welche dasselbe Linienelement als Träger haben, bilden also einen Verein.*

Nimmt man nun zweitens an, daß die Träger die Linienelemente einer Kurve sind, so hat man

$$y = f(x),$$
$$p = f'(x)$$

und daher

$$q = \frac{dp}{dx} = f''(x).$$

Eine zweite Art von Vereinen bildet also die Gesamtheit der Krümmungselemente einer beliebigen Kurve.

Nimmt man endlich an, daß alle Linienelemente selbst wieder denselben Punkt als Träger haben, so muß man zu anderen Koordinaten greifen; man muß an Stelle von q einführen

$$q = \frac{r}{s}.$$

Ein Verein von Krümmungselementen ist dann gegeben durch die Gleichungen

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$p = p(t),$$
$$r = r(t),$$
$$s = s(t),$$

wo die Relationen bestehen:

$$\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = 0,$$
$$r\frac{dx}{dt} - s\frac{dp}{dt} = 0.$$

Soll $x = x_0$, $y = y_0$ und p beliebig sein, so ergiebt sich

$$s = 0.$$

Die drei Gleichungen

$$x = x_0,$$
$$y = y_0,$$
$$s = 0$$

stellen dann einen Elementverein der dritten Art dar (wir wollen ihn einen nichtregulären Krümmungselementverein nennen oder auch Punktkreis); er ist gleichsam ein Kreis mit dem Radius Null.

Demnach haben wir drei Klassen von Krümmungselementvereinen: Diejenigen, deren Elemente ein Linienelement als gemeinsamen Träger haben; die Elemente einer Kurve; endlich Punktkreise.

3. **Oskulation von zwei Krümmungselementvereinen.** Die Erweiterung des Begriffes Krümmungselement durch Mitberücksichtigung der ausgearteten Elemente und der aus ihnen gebildeten Vereine bringt es mit sich, daß wir auch den Begriff „Oskulation zweier Kurven in einem Punkte“ erweitern (vgl. § 13, 5).

Zwei Krümmungselementvereine oskulieren sich, wenn sie ein gemeinsames Krümmungselement haben.

Beispiele: 1. Die Kurve (Fig. 24)

$$y = x^3$$

und die Gerade

$$y = 0$$

oskulieren sich in dem Element

$$x = y = p = r = 0.$$

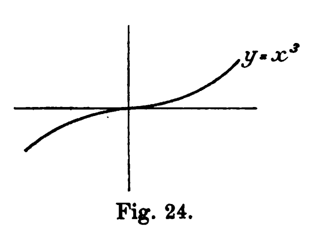


Fig. 24.

2. Die Kurve (Fig. 25)

$$y = \frac{x^2}{2}$$

und das Linienelement

$$x = y = p = 0$$

oskulieren sich in dem Krümmungselement

$$x = y = p = 0, \quad \frac{r}{s} = 1.$$

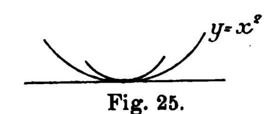


Fig. 25.

3. Die Kurve (Fig. 26)

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

und der Punktkreis

$$x = y = s = 0$$

oskulieren sich in dem Element

$$x = y = p = s = 0.$$

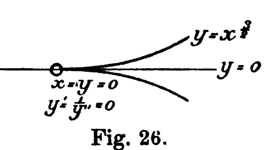
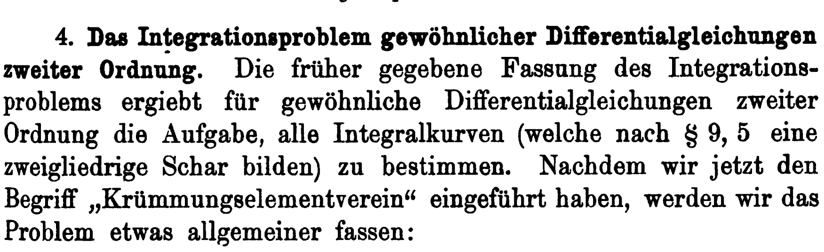


Fig. 26.



4. **Das Integrationsproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Die früher gegebene Fassung des Integrationsproblems ergiebt für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Aufgabe, alle Integralkurven (welche nach § 9, 5 eine zweigliedrige Schar bilden) zu bestimmen. Nachdem wir jetzt den Begriff „Krümmungselementverein" eingeführt haben, werden wir das Problem etwas allgemeiner fassen:

Gegeben ist eine Gleichung

$$f(x, y, p, q) = 0.$$

Man soll alle Integralgebilde, d. h. alle aus Krümmungselementen der durch die Gleichung bestimmten dreigliedrigen Schar gebildeten Vereine angeben.

Auch wollen wir, um noch allgemeiner zu verfahren, an Stelle von q den Quotienten $\frac{r}{s}$ einführen, so daß wir Gleichungen bekommen, die in r und s homogen sind.

Die Einführung der Größen r und s ist deshalb notwendig, damit auch die ausgearteten Integralgebilde (die Punktkreise) nicht außer Betracht gelassen werden.

Zum Beispiel stellt die Gleichung

$$1 + yy'' + y'^2 = 1 + yq + p^2 = 0$$

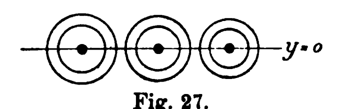


Fig. 27.

die Kreise der Schar

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2,$$

d. h. alle Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf der x-Axe haben, dar (Fig. 27). Damit die Differentialgleichung auch die Punktkreise, deren Mittelpunkte auf der x-Axe liegen, mit darstellt, muß man r und s einführen. Dadurch erhält die Differentialgleichung die Form

$$(1 + p^2)s + yr = 0.$$

Hier kann man aus der Gleichung unmittelbar ablesen, daß die durch die Gleichungen

$$y = s = 0$$

definierten Punktkreise mit zu den Integralgebilden gehören.

5. **Erweiterung von Berührungstransformationen.** Wie wir (in § 15, 2) durch Erweiterung von Punkttransformationen zu Berührungstransformationen gelangten, so gelangen wir zu Transformationen, bei denen jeder Krümmungselementverein wieder in einen Verein übergeht, wenn wir die Berührungstransformation in geeigneter Weise erweitern.

Gegeben sei also eine Berührungstransformation durch die Gleichungen

$$x_1 = X(x, y, p),$$
$$y_1 = Y(x, y, p),$$
$$p_1 = P(x, y, p).$$

Können wir durch Hinzufügen einer geeigneten Gleichung

$$q_1 = Q(x, y, p, q)$$

erreichen, daß jeder Krümmungselementverein wieder in einen Verein übergeht?

Damit dies der Fall ist, muß die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} - Q\frac{\partial X}{\partial t} = \varrho_1\left(\frac{\partial y}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \varrho_2\left(\frac{\partial p}{\partial t} - q\frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

erfüllt werden, d. h. es muß sein:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - Q\frac{\partial X}{\partial x} = -\varrho_1 p - \varrho_2 q,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - Q\frac{\partial X}{\partial y} = \varrho_1,$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} - Q\frac{\partial X}{\partial p} = \varrho_2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$Q = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial x} + p\dfrac{\partial P}{\partial y} + q\dfrac{\partial P}{\partial p}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}}.$$

Um nun zu zeigen, daß die durch Hinzunahme der Gleichung

$$q_1 = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial x} + p\dfrac{\partial P}{\partial y} + q\dfrac{\partial P}{\partial p}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}}$$

ergänzte Berührungstransformation immer noch regulär ist, müssen wir nachweisen, daß die Determinante

$$\frac{D(q_1, p_1, y_1, x_1)}{D(q, p, y, x)}$$

von Null verschieden ist.

Das folgt nun sofort daraus, daß diese Funktionaldeterminante den Wert hat

$$\frac{\partial q_1}{\partial q} \cdot \frac{D(p_1, y_1, x_1)}{D(p, y, x)}$$

und die beiden Faktoren dieses Ausdrucks von Null verschieden sind:

E r s t e n s nämlich ist, weil ja die gegebenen Gleichungen der Voraussetzung nach eine Berührungstransformation definieren, die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(p_1, y_1 x_1)}{D(p, y, x)}$$

von Null verschieden, und zweitens ist

$$\frac{\partial q_1}{\partial q} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial p} \cdot \left\{\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}\right\} - \dfrac{\partial X}{\partial p}\left\{\dfrac{\partial P}{\partial x} + p\dfrac{\partial P}{\partial y} + q\dfrac{\partial P}{\partial p}\right\}}{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}\right)^2} =$$

$$= \frac{[P, X]}{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}\right)^2},$$

also von Null verschieden.[1]

---

[1] $[P, X]$ kann nicht verschwinden, da wegen des Verschwindens von $[Y, X]$

Demnach haben wir also das Ergebnis:

Erweitert man eine (reguläre) Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, p),$$
$$y_1 = Y(x, y, p),$$
$$p_1 = P(x, y, p),$$

indem man die Gleichung

$$q_1 = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} + p \frac{\partial P}{\partial y} + q \frac{\partial P}{\partial p}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} = q \frac{\partial X}{\partial p}}$$

hinzufügt, so erhält man eine Transformation, welche jeden Verein von Krümmungselementen wieder in einen Verein überführt.

Ferner folgt:

Krümmungselementvereine, welche sich oskulieren, gehen wieder in Vereine über, welche sich oskulieren.

6. **Beispiele.**

a) Erweiterung der Legendre'schen Transformation. Das Verfahren der Erweiterung führt bei der Legendre'schen Transformation:

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = xp - y,$$
$$p_1 = -x,$$

auf die weitere Formel

$$q_1 = \frac{-1}{-q} = \frac{1}{q}.$$

Wenn man endlich an Stelle von q die Größen r und s einführt, so bekommt man die folgenden Transformationsformeln

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = xp - y,$$
$$p_1 = -x,$$
$$r_1 = \alpha s,$$
$$s_1 = \alpha r,$$

in denen α eine beliebige Größe ist.

(§ 16, 1) und von $[X, X]$ sich sonst ergeben würde, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(p_1, y_1, x_1)}{D(p, y, x)}$$

den Wert Null hätte, was den Voraussetzungen widerspricht.

b) Die Dilatation.

Durch Erweiterung der Formeln

$$x_1 = x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$y_1 = y + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$p_1 = p,$$

erhält man noch

$$q_1 = \frac{q}{1 - q(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

oder

$$r_1 = \alpha r,$$

$$s_1 = \alpha\left(s - r(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

c) Die zur Fußpunkttransformation inverse Transformation.

Löst man die Gleichungen der Fußpunkttransformation (§ 15, 6) auf nach x, y und p, so kommt

$$x = \frac{2x_1 y_1 + p_1(y_1^2 - x_1^2)}{y_1 - p_1 x_1},$$

$$y = \frac{y_1^2 - x_1^2 - 2p_1 y_1 x_1}{y_1 - p_1 x_1},$$

$$p = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Durch Erweiterung kommt noch hinzu

$$q = \frac{(x_1 p_1 - y_1)^3}{y_1^3(q_1(y_1^2 + x_1^2) + 2(y_1 - p_1 x_1)(1+p_1^2))}$$

oder

$$r = (x_1 p_1 - y_1)^3 r_1,$$

$$s = y_1^3\{r_1(y_1^2 + x_1^2) + 2(y_1 - p_1 x_1)s_1(1+p_1^2)\}.$$

6. **Anwendung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Da bei erweiterten Berührungstransformationen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung wieder in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung übergeht, da ferner jeder Krümmungselementverein sich wieder in einen Verein verwandelt, so verwandeln sich die Integralgebilde einer gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung in die Integralgebilde der transformierten Gleichung. Man kann also, wenn man von einer Differentialgleichung zweiter Ordnung die Integralgebilde kennt, und nun gleichzeitig sowohl auf die Gleichung wie auf die Integralgebilde die Berührungstransformation anwendet, eine neue Gleichung und zugleich auch ihre Integralgebilde konstruieren.

Beispiel 1: Wendet man auf die Gleichung

$$s = 0,$$

welche die Punktkreise darstellt, die LEGENDRE'sche Transformation an, so erhält man als neue Gleichung

$$r = 0, \quad \text{oder} \quad y'' = 0.$$

Aus den Integralgebilden

$$x = a,$$
$$y = b$$

erhält man

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = ap - b,$$

d. h.

$$y_1 + x_1 a + b = 0$$

als die geraden Linien der Ebene.

Die Integralgebilde von $y'' = 0$ sind also die Geraden (was man leicht auch direkt verifizieren kann). —

Beispiel 2: Wendet man auf $s = 0$ die Dilatation an, so bekommt man die Gleichung

$$y_1'' = \frac{1}{(1 + y_1'^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\frac{y_1''}{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} = 1.$$

Andererseits führt diese Transformation die Punktkreise über in die Curven

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = 1,$$

d. h. in die Kreise mit dem Radius 1.

Man kann leicht auch direkt bestätigen, daß diese Kurven die Integralgebilde der transformierten Gleichung sind.

Beispiel 3: Wendet man auf die Gleichung

$$s = 0$$

die Fußpunkttransformation an, so verwandeln sich die Punktkreise in die durch die Gleichung

$$q_1 (y_1^2 + x_1^2) + 2(y_1 - p_1 x_1)(1 + p_1^2) = y_1''(y_1^2 + x_1^2) + 2(y_1 - y_1' x_1)(1 + y_1'^2) = 0$$

definierten Kurven.

Diese Kurven müssen aber, wie die charakteristische Gleichung (§ 15, 6)

$$x_1^2 + y_1^2 - x x_1 - y y_1 = 0$$

lehrt, die durch den Koordinatenanfang gehenden Kreise darstellen.

Das kann man leicht bestätigen. Eliminiert man nämlich aus

$$x_1^2 + y_1^2 - x x_1 - y y_1 = 0,$$
$$2(x_1 + y_1' y_1) - x - y y_1' = 0,$$
$$2(1 + y_1'^2 + y_1 y_1'') - y y_1'' = 0$$

die Größen x und y, so erhält man die Differentialgleichung wieder.

§ 21. Singuläre Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. **Definition der singulären Lösung.** Ähnlich wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung finden sich auch bei denen zweiter Ordnung zuweilen Lösungen, deren Existenz nicht aus den allgemeinen Existenzsätzen sich folgern läßt.

Wenn nämlich die Differentialgleichung in der Form

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

gegeben ist, so versagt unser Beweis für Lösungen, welche gleichzeitig auch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

erfüllen.

Wir wollen jetzt die singuläre Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche in y'' ganz und rational ist und sich nicht in verschiedene Faktoren zerlegt, folgendermaßen definieren:

Wenn die durch Elimination von y'' aus

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

erhaltene Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

lauter Integralkurven hat, welche die gegebene Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

erfüllen, so ist die Gleichung

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

eine singuläre Lösung der gegebenen Gleichung.

2. **Bestimmung der singulären Lösung.** Die Gleichungen

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

ergeben nicht notwendig eine singuläre Lösung durch Elimination von y''. Damit die durch dieses Verfahren gewonnene Gleichung auch wirklich nur Lösungen hat, welche die gegebene Differentialgleichung erfüllen, ist vielmehr außerdem noch notwendig, daß auch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

noch erfüllt ist (vgl. § 18, 3).

Um also zu untersuchen, ob es eine singuläre Lösung giebt, hat man aus den drei Gleichungen

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

y'' *zu eliminieren.* Bekommt man durch Elimination eine einzige Gleichung

$$\varphi(x, y, y') = 0,$$

so wird die singuläre Lösung durch diese Gleichung dargestellt.

3. **Beispiele.**

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'') = (y'')^2 (x^2 + y^2 - 1) - 2y''(1 + y'^2)(xy' - y) + (1 + y'^2)^3 = 0.$$

Hierzu hat man noch zu fügen die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 2\left(y''(x^2 + y^2 - 1) - (1 + y'^2)(xy' - y)\right) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} &= 2y''^2(x + yy') - 2y''(1 + y'^2) \cdot xy'' \\ &\quad - 2y'y''\left(2y''(xy' - y) - 3(1 + y'^2)^2\right) \\ &= 6y''y'\{y''(y - xy') + (1 + y'^2)^2\} = 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus den ersten beiden Gleichungen y'', so kommt

$$\varphi(x, y, y') = (x^2 + y^2 - 1)(1 + y'^2) - (xy' - y)^2 = 0.$$

Setzt man andererseits den aus der dritten Gleichung sich ergebenden Wert

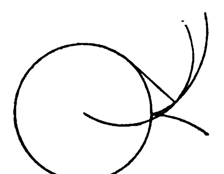
$$y'' = -\frac{(1 + y'^2)^2}{(y - x y')}$$

in die zweite ein, so folgt

$$\varphi(x, y, y') = (1 + y'^2)(x^2 + y^2 - 1) - (x y' - y)^2 = 0.$$

Hieraus folgt, daß $\varphi = 0$ eine singuläre Lösung darstellt.

Wir können die gegebenen Gleichungen leicht integrieren und die Resultate geometrisch deuten (vgl. Fig. 28).


Fig. 28.

Die Integralkurven der Gleichung zweiter Ordnung haben die Gleichung

$$(y - \sin\varphi) + (x - \cos\varphi)^2 = c$$

und sind demnach Kreise mit beliebigen Radien, deren Mittelpunkte auf dem Einheitskreis liegen.

Die Integralkurven der singulären Lösungen haben die Gleichung

$$x = \cos\varphi + (\varphi + c)\sin\varphi,$$
$$y = \sin\varphi - (\varphi + c)\cos\varphi,$$

sind also die Evolventen des Einheitskreises.

Diese Evolventen bilden eine eingliedrige Schar von Kurven, und jede Evolvente wird oskuliert von Kreisen, welche der durch die Gleichung zweiter Ordnung definierten Schar angehören.

Das Beispiel illustriert die Möglichkeit der Entstehung einer singulären Lösung. Bei jeder Zusammenfassung der zweigliedrigen Schar von Integralkurven in ∞^1 eingliedrige Scharen erhält man als Umhüllungsgebilde der einzelnen Scharen ∞^1 Enveloppen. Giebt es eine Zusammenfassung, bei der die Enveloppen von den gegebenen Kurven oskuliert werden, so stellen diese Enveloppen die singuläre Lösung dar.

b) Gegeben sei die Gleichung

$$F(x, y, y', y'') = y''(x^2 + y^2) + 2(y - y'x)(1 + y'^2) = 0.$$

Die drei Gleichungen

$$F(x, y, y', y'') = y''(x^2 + y^2) + 2(y - y'x)(1 + y'^2) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = (x^2 + y^2) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} =$$
$$= 2\{y''(x + y y') - x y''(1 + y'^2) + 2(y - x y')y' y''\} = 0$$

Die Einführung der Größen r und s ist deshalb notwendig, damit auch die ausgearteten Integralgebilde (die Punktkreise) nicht außer Betracht gelassen werden.

Zum Beispiel stellt die Gleichung

$$1 + yy'' + y'^2 = 1 + yq + p^2 = 0$$

die Kreise der Schar

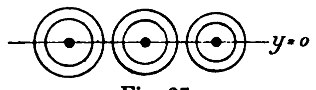


Fig. 27.

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2,$$

d. h. alle Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf der x-Axe haben, dar (Fig. 27). Damit die Differentialgleichung auch die Punktkreise, deren Mittelpunkte auf der x-Axe liegen, mit darstellt, muß man r und s einführen. Dadurch erhält die Differentialgleichung die Form

$$(1 + p^2)s + yr = 0.$$

Hier kann man aus der Gleichung unmittelbar ablesen, daß die durch die Gleichungen

$$y = s = 0$$

definierten Punktkreise mit zu den Integralgebilden gehören.

5. **Erweiterung von Berührungstransformationen.** Wie wir (in § 15, 2) durch Erweiterung von Punkttransformationen zu Berührungstransformationen gelangten, so gelangen wir zu Transformationen, bei denen jeder Krümmungselementverein wieder in einen Verein übergeht, wenn wir die Berührungstransformation in geeigneter Weise erweitern.

Gegeben sei also eine Berührungstransformation durch die Gleichungen

$$x_1 = X(x, y, p),$$
$$y_1 = Y(x, y, p),$$
$$p_1 = P(x, y, p).$$

Können wir durch Hinzufügen einer geeigneten Gleichung

$$q_1 = Q(x, y, p, q)$$

erreichen, daß jeder Krümmungselementverein wieder in einen Verein übergeht?

Damit dies der Fall ist, muß die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} - Q\frac{\partial X}{\partial t} = \varrho_1\left(\frac{\partial y}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \varrho_2\left(\frac{\partial p}{\partial t} - q\frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

erfüllt werden, d. h. es muß sein:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - Q\frac{\partial X}{\partial x} = -\varrho_1 p - \varrho_2 q,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - Q\frac{\partial X}{\partial y} = \varrho_1,$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} - Q\frac{\partial X}{\partial p} = \varrho_2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$Q = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial x} + p\dfrac{\partial P}{\partial y} + q\dfrac{\partial P}{\partial p}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}}.$$

Um nun zu zeigen, daß die durch Hinzunahme der Gleichung

$$q_1 = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial x} + p\dfrac{\partial P}{\partial y} + q\dfrac{\partial P}{\partial p}}{\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}}$$

ergänzte Berührungstransformation immer noch regulär ist, müssen wir nachweisen, daß die Determinante

$$\frac{D(q_1, p_1, y_1, x_1)}{D(q, p, y, x)}$$

von Null verschieden ist.

Das folgt nun sofort daraus, daß diese Funktionaldeterminante den Wert hat

$$\frac{\partial q_1}{\partial q} \cdot \frac{D(p_1, y_1, x_1)}{D(p, y, x)}$$

und die beiden Faktoren dieses Ausdrucks von Null verschieden sind:

Erstens nämlich ist, weil ja die gegebenen Gleichungen der Voraussetzung nach eine Berührungstransformation definieren, die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(p_1, y_1 x_1)}{D(p, y, x)}$$

von Null verschieden, und zweitens ist

$$\frac{\partial q_1}{\partial q} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial p}\cdot\left\{\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}\right\} - \dfrac{\partial X}{\partial p}\left\{\dfrac{\partial P}{\partial x} + p\dfrac{\partial P}{\partial y} + q\dfrac{\partial P}{\partial p}\right\}}{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}\right)^2} =$$

$$= \frac{[P, X]}{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial p}\right)^2},$$

also von Null verschieden.[1]

[1] $[P, X]$ kann nicht verschwinden, da wegen des Verschwindens von $[Y, X]$

so ist

$$\frac{Y}{p^{n+1}} = -1,$$

also

(2) $$\frac{dY}{dx} \cdot p_{n+1} - \frac{dp_{n+1}}{dx} Y = 0.$$

Diese abgeleitete Gleichung (2) ist nun eine homogene Gleichung von $(n+1)$ter Ordnung. Bestimmt man die Integrationskonstanten, welche in den Lösungen der zweiten Gleichung auftreten, so daß

$$Y = -p_{n+1}$$

wird, so bekommt man Lösungen der ersten Gleichung. Nachdem die Möglichkeit der Reduktion auf eine homogene Gleichung nachgewiesen ist, wollen wir von jetzt an nur homogene Gleichungen behandeln.

2. **Die vollständige Lösung und die Singularitäten.** Aus der Form der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung ergiebt sich sofort der Satz:

Kennt man n partikuläre Lösungen

$$y_1 = f_1(x) \ldots, \qquad y_n = f_n(x),$$

zwischen denen keine lineare Relation

(1) $$a_1 f_1(x) \ldots + a_n f_n(x) = 0$$

besteht, so hat die allgemeine Lösung die Form

$$y = c_1 y_1 \ldots + c_n y_n.$$

Der Satz folgt daraus, daß erstens wegen der homogenen Form jede Summe

$$c_1 y_1 \ldots + c_k y_k$$

die Differentialgleichung erfüllt, sobald $y_1 \ldots y_k$ Lösungen sind; daß ferner die Funktionaldeterminante (§ 9, 5)

$$\frac{D\left(y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{D(c_1 \ldots c_n)} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 & \ldots y_n \\ y_1', & y_2' & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. [Würde sie verschwinden, so bestände, entgegengesetzt der Voraussetzung, eine Relation von der Form (1).]

Aus dem Umstand, daß die allgemeine Lösung sich aus der partikulären linear zusammensetzt, folgt, daß alle Lösungen die-

selben singulären Stellen haben: Hört die Entwickelung der Funktionen $y_1 \dots y_n$ an einer bestimmten Stelle auf zu konvergieren, so hört auch die von jeder anderen Lösung y auf, zu konvergieren.

3. **Beispiele für Singularitäten.**

a) Die Gleichung

$$y' - \frac{y}{x^2} = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y = c e^{-\frac{1}{x}}.$$

$x = 0$ ist für alle Integralkurven eine singuläre Stelle (eine *feste Singularität*), wo gleichzeitig auch $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, der Koeffizient von y, unendlich wird.

b) Die Gleichung

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y = c x.$$

Hier sind alle Integralkurven regulär in der ganzen Ebene.

c) Die Gleichung

$$y' + y^2 = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y = \frac{1}{x - x_0}.$$

Die Funktion wird unendlich für $x = x_0$. Jede Integralkurve hat also eine andere Unstetigkeitsstelle. (Man nennt daher die Singularität beweglich, im Gegensatz zu den festen Singularitäten bei linearen homogenen Differentialgleichungen.)

4. **Die Laplace'sche Transformation.** Bei denjenigen linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, kann man oft mit Vorteil die Laplace'sche Transformation anwenden.

Zunächst kann man die Differentialgleichung in der Form schreiben

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \dots + P_n(x) \cdot y = 0,$$

wo die P_i ganze Funktionen n'ten Grades von x sind.

Jetzt wird nun an Stelle von y die abhängige Veränderliche x eingeführt durch die Formel

$$y = \int_\alpha^\beta V(z)\, e^{zx}\, dz.$$

Die Bestimmung der Funktion V und der Grenzen α und β behalten wir uns noch vor und schreiben zuerst die LAPLACE'sche Transformierte der gegebenen Differentialgleichung hin.

In der gegebenen Differentialgleichung treten lauter Glieder von folgender Form auf.

$$c_{pm}\, x^p \frac{d^m y}{d x^m}.$$

welche übergehen in

$$c_{pm}\, x^p \int_\alpha^\beta z^m\, V(z)\, e^{zx}\, dz.$$

Das bestimmte Integral kann man nun zerlegen nach der Formel:

$$\int_\alpha^\beta f(z) \frac{d^p \varphi(x)}{d x^p}\, dz = \Big[f(z) \frac{d^{p-1} \varphi}{d x^{p-1}} - \frac{df}{dx} \cdot \frac{d^{p-2} \varphi}{d x^{p-2}}$$

$$+ - \dots + (-1)^{p-1} \varphi(z) \frac{d^{p-1} f(x)}{d x^{p-1}} \Big]_\alpha^\beta + (-1)^p \int_\alpha^\beta \varphi(z) \frac{d^p f(x)}{d x^p} \cdot dz.$$

Nun ist

$$x^p e^{zx} = \frac{d^p e^{zx}}{d z^p},$$

und demnach:

$$\int_\alpha^\beta V(z) \cdot z^m x^p e^{zx}\, dz$$

$$= \Big[V \cdot z^m x^{p-1} e^{zx} - \frac{d}{dz} (V z^m)\, x^{p-2} e^{zx} \dots + (-1)^{p-1} \frac{d^{(p-1)}}{dz^{p-1}} (V z^m) \cdot e^{zx} \Big]_\alpha^\beta$$

$$+ (-1)^p \int_\alpha^\beta e^{zx} \frac{d^p (V z^m)}{d z^p}\, dz.$$

Indem man nun jedes einzelne Glied

$$c_{pm}\, x^p \frac{d^m y}{d x^m}$$

in dieser Weise transformiert, erhält die Differentialgleichung die Form

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sum_{0}^{n'} p (-1)^k \left\{ c_{ko} \frac{d^k V}{d z^k} + c_{k1} \frac{d^k (V z)}{d z^k} + \dots + c_{kn} \frac{d^k (V z^n)}{d z^k} \right\} e^{zx} \, dz$$

$$+ \Big[\dots\dots\dots \Big]_{\alpha}^{\beta} = 0 .$$

Dabei ist die eckige Klammer eine Zusammenfassung von den verschiedenen eckigen Klammern, welche bei den einzelnen Gliedern $c_{pm} x^p \frac{d^m y}{d x^m}$ auftreten; die Konstanten c_{pm} bedeuten die in den Polynomen

$$P_{n-j}(x) = c_{0j} + c_{1j} x \dots + c_{n'j} x^{n'}$$

auftretenden Koeffizienten.

Soll nun die Differentialgleichung erfüllt werden, so kann man dies erreichen, indem man die Summe, welche unter dem Integralzeichen als Faktor von e^{zx} auftritt, gleich Null setzt. Man hat dann nur noch α und β so zu bestimmen, daß auch die eckige Klammer verschwindet.

Durch dieses Verfahren verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung nter Ordnung, bei welcher n' der höchste Grad ist, in welchem x vorkommt, in eine Differentialgleichung n'ter Ordnung für V, bei der dann n der höchste Grad ist, in dem z vorkommt.

5. **Der Fall linearer Koeffizienten.** Sind im speziellen die Koeffizienten linear in x, so bekommt man eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, welche sich nach (§ 11, 4) integrieren läßt.

Wir wollen diesen Fall nun genauer durchführen. Gegeben sei also die Gleichung

$$(a_0 x + b_0) \frac{d^n y}{d x^n} + (a_1 x + b_1) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} \dots + (a_n x + b_n) = 0 .$$

Hier ist zu substituieren:

$$y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} V(z) \, e^{zx} \, dz ,$$

. . . .

$$y^{(m)} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} z^m \, V(z) \, e^{zx} \, dz ,$$

. . . .

$$xy = \Big[V(z)e^{zx} \Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^{zx} \frac{dV}{dz} dz,$$

. . . .

$$xy^{(n)} = \Big[V(z) z^n e^{zx} \Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^{zx} \frac{d(Vz^n)}{dz} dz.$$

Durch diese Substitution erhält man

$$0 = \Big[e^{zx} V(z) \cdot (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n) \Big]_\alpha^\beta$$

$$+ \int_\alpha^\beta e^{zx} \cdot \Big(-a_0 \frac{d(Vz^n)}{dz} \ldots - a_n \frac{dV}{dz} + b_0 V(z) \cdot z^n \ldots + b_n V(z) \Big) dz = 0.$$

Hier hat man also eine Hilfsgleichung von der Form

$$\frac{dV}{dz} P(z) + V Q(z) = 0,$$

wo P und Q vom $n$ten Grad sind.

Diese Gleichung kann man auch so schreiben:

$$\frac{d \log V}{dz} = - \frac{Q(z)}{P(z)} = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{z - \alpha_1} + \frac{\lambda_2}{z - \alpha_2} + \ldots,$$

indem wir die rationale Funktion in Partialbrüche zerlegen. Sind nun erstens in $P(z)$ nur lauter lineare Faktoren enthalten — hat also $P(z) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln —, so bekommt man

$$V(z) = e^{\lambda_0 z} (z - \alpha_1)^{\lambda_1} (z - \alpha_2)^{\lambda_2} \ldots (z - \alpha_n)^{\lambda_n}.$$

Nimmt man jetzt noch für α und β irgend zwei verschiedene Wurzeln α_i und α_k der Gleichung

$$P(z) = 0,$$

und sind die λ alle positiv, so verschwindet auch die eckige Klammer und man erhält als Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$y = \int_{\alpha_i}^{\alpha_k} V(z) e^{zx} dx.$$

Indem man für α_i und α_k ein anderes Paar von Wurzeln nimmt, erhält man eine andere partikuläre Lösung.

6. **Die Bessel'schen Funktionen.** Als Beispiel dieser Klasse von Differentialgleichungen wählen wir die folgende:

$$x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 2m \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Dann erhält man für V die Gleichung:

$$-\frac{d(Vz^2)}{dz}-\frac{dV}{dz}+2mV(z)z=0$$

oder

$$\frac{d\log V}{dz}=\frac{2z(m-1)}{1+z^2}=\frac{d\log(1+z^2)^{m-1}}{dz},$$

d. h. es wird

$$V=c(1+z^2)^{m-1}.$$

V verschwindet für $z=\pm i$. Demnach kommt, wenn wir $\beta=+i$, $\alpha=-i$ setzen, schließlich

$$y=c\int_{-i}^{+i}(1+z^2)^{m-1}e^{zx}dz.$$

Setzt man noch

$$z=iz_1,$$

so kommt

$$y_i=ic\int_{-1}^{+1}(1-z_1{}^2)^{m-1}(\cos z_1 x+i\sin z_1 x)dz.$$

Demnach hat man schließlich die folgenden reellen Lösungen

$$y_1=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{m-1}\cos zx\,dx$$

und

$$y_2=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{m-1}\sin zx\,dx.$$

Man erhält diese reellen Lösungen aus der soeben hingeschriebenen imaginären Lösung y_i, indem man einmal

$$y_1=\frac{y_i(x)+y_i(-x)}{2ic}$$

und dann

$$y_2=\frac{y_i(x)-y_i(-x)}{-2c}$$

bildet. Die allgemeine Lösung hat dann schließlich die Form

$$y=c_1y_1+c_2y_2.$$

7. **Die linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.** Man kann auch mit einer kleinen Abänderung das Laplace'sche Verfahren anwenden auf die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die LAPLACE'sche Transformierte der Gleichung

$$a_0 \frac{d^n y}{d x^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + a_n y = 0$$

lautet einfach

$$0 = \int_\alpha^\beta V e^{zx} (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n) d z.$$

Hier darf man nun nicht einfach $V = 0$ setzen, denn man käme auf die triviale Lösung

$$y = 0.$$

Man kann aber das Integral zum Verschwinden bringen, indem man es in der komplexen z-Ebene über einen geschlossenen Weg erstreckt, längs dessen V nicht überall verschwindet.[1]

Wir wählen nun die Funktion V in folgender Weise. Ist α eine p-fache Wurzel der sog. charakteristischen Gleichung

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = 0,$$

so setzen wir

$$V(z) = \frac{A_p}{(z-\alpha)^p} + \frac{A_{p-1}}{(z-\alpha)^{p-1}} + \frac{A_1}{(z-\alpha)} + G(z).$$

Erstrecken wir jetzt das Integral

$$\int f(z)\, V(z)\, e^{zx}\, d z$$

auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Punkt α ist, so ergiebt sich der Wert Null, da der Integrand innerhalb des Kreises sich regulär verhält.

Das Integral

$$y = \int V(z) e^{zx} d z$$

hat dann den Wert

$$y = e^{\alpha x} . 2 c i \left\{ \frac{A_p x^{p-1}}{(p-1)!} \ldots + A_0 \right\},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$y = c_0 e^{\alpha x} + c_1 x e^{\alpha x} \ldots + c_{p-1} x^{p-1} e^{\alpha x}.$$

Wir haben also schließlich das Resultat:

Ist $z = \alpha$ eine p-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = 0,$$

so ist

$$y = c_0 e^{\alpha x} + c_1 x e^{\alpha x} \ldots + c_{p-1} x^{p-1} e^{\alpha x}$$

---

[1] BURCKHARDT, Analytische Funktionen, § 35, p. 96ff.

eine Lösung der Differentialgleichung

$$a_0 \frac{d^n y}{d x^n} \cdots + a_n y = 0 .$$

Die Konstanten $c_0 \ldots c_{p-1}$ *sind ganz willkürlich.*

Hat nun die charakteristische Gleichung z. B. lauter verschiedene Wurzeln, so lautet die allgemeine Lösung

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} \ldots + c_n e^{\alpha_n x} .$$

§ 23. Der Jacobi'sche Multiplikator.

1. **Definition des Multiplikators.** Ähnlich wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen der Euler'sche Multiplikator (§ 11), dient bei einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Veränderlichen:

$$(1) \qquad \frac{d y}{d x} = \frac{Y(x, y, z)}{X(x, y, z)}, \qquad \frac{d z}{d x} = \frac{Z(x, y, z)}{X(x, y, z)}$$

der Jacobi'sche Multiplikator dazu, die Integration zu erleichtern.

Der Jacobi'sche Multiplikator wird definiert durch die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial (M X)}{\partial x} + \frac{\partial (M Y)}{\partial y} + \frac{\partial (M Z)}{\partial z} = 0 ,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$X \frac{\partial \log M}{\partial x} + Y \frac{\partial \log M}{\partial y} + Z \frac{\partial \log M}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 .$$

Jede Funktion $M(x, y, z)$, *welche diese partielle Differentialgleichung erfüllt, nennt man einen Multiplikator des Systems* (1) (oder der nach § 4, 3 äquivalenten Gleichung:

$$(2) \qquad W(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0).$$

2. **Der Multiplikator und die Lösungen.** Der Jacobi'sche Multiplikator hat ganz ähnliche Eigenschaften wie der Euler'sche (vgl. § 11, 1).

Es gilt nämlich erstens der folgende Satz:

Multipliziert man einen Multiplikator M *mit einer Lösung* f *der partiellen Differentialgleichung* (2), *so ist das Produkt wieder ein Multiplikator.*

Denn es ist dann

$$X\frac{\partial \log Mf}{\partial x} + Y\frac{\partial \log Mf}{\partial y} + Z\frac{\partial \log Mf}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$= X\frac{\partial \log M}{\partial x} + Y\frac{\partial \log M}{\partial y} + Z\frac{\partial \log M}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$- \frac{1}{f}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

in diesem Ausdruck verschwindet die erste Zeile, weil M ein Multiplikator ist, die zweite, weil f eine Lösung von (2) ist, also verschwindet der ganze Ausdruck und

$$M_1 = Mf$$

ist wieder ein Multiplikator.

Dieser Satz läßt sich auch umkehren: *Der Quotient zweier Multiplikatoren ist notwendig eine Lösung der Gleichung* (2).

Sind nämlich M_1 und M_2 zwei Multiplikatoren, so ist

$$X\frac{\partial \log M_1}{\partial x} + Y\frac{\partial \log M_1}{\partial y} + Z\frac{\partial \log M_1}{\partial z}$$

$$- X\frac{\partial \log M_2}{\partial x} - Y\frac{\partial \log M_2}{\partial y} - Z\frac{\partial \log M_2}{\partial z} = 0$$

$$= W\left(\log\frac{M_1}{M_2}\right) = 0.$$

Demnach ist $\log\frac{M_1}{M_2}$ und also auch $\frac{M_1}{M_2}$ selbst eine Lösung.

3. **Der letzte Multiplikator.** Kennt man von der Gleichung (2) eine Lösung

$$\varphi(x, y, z) = \gamma,$$

so kann man mit Hilfe derselben das Problem der Integration von (2) vereinfachen.

Führt man nämlich etwa an Stelle von z die neue Variable γ ein und deutet diese Substitution durch einen horizontalen Strich an, so geht die Differentialgleichung über in

$$\overline{W}(f) = \overline{X}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \overline{Y}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \gamma}\cdot W(\varphi)$$

$$= \overline{X}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \overline{Y}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = 0.$$

Sie ist also in ein Problem mit weniger Variabeln übergeführt. Dabei besteht der folgende Satz:

Ist M ein Multiplikator der gegebenen Gleichung, so ist ein Multiplikator der transformierten Gleichung definiert durch

$$\bar N = \frac{\bar M}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, muß gezeigt werden, daß die Gleichung

$$\bar X \frac{\partial \log N}{\partial x} + \bar Y \frac{\partial \log N}{\partial y} + \frac{\partial \bar X}{\partial x} + \frac{\partial \bar Y}{\partial y} = 0$$

erfüllt ist.

Es gelingt dies mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y} + Z \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

(hier ist $u = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ gesetzt) und

$$X \frac{\partial \log M}{\partial x} + Y \frac{\partial \log M}{\partial y} + Z \frac{\partial \log M}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

von denen die erste aus $W(\varphi) = 0$ durch Differentiation nach z folgt, die zweite besagt, daß M ein Multiplikator ist.

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{1}{u}$ und subtrahiert sie von der zweiten, so kommt:

$$X \frac{\partial \log N}{\partial x} + Y \frac{\partial \log N}{\partial y} + Z \frac{\partial \log N}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$- \frac{1}{u}\left(\frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$\bar X \frac{\partial \log \bar N}{\partial x} + \bar Y \frac{\partial \log \bar N}{\partial y} + \frac{\partial \bar X}{\partial x} + \frac{\partial \bar Y}{\partial y}$$
$$+ \bar X \frac{\partial \log \bar N}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar Y \frac{\partial \log \bar N}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar Z \frac{\partial \log \bar N}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
$$+ \frac{\partial \bar X}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \bar Y}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \bar Z}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
$$- \frac{1}{u}\left(\frac{\partial X}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

In diesem Ausdruck verschwindet die zweite Zeile, weil φ eine Lösung ist, die weiteren Ausdrücke heben sich fort, weil

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial \bar X}{\partial \gamma} \cdot u, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial \bar Y}{\partial \gamma} \cdot u, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial \bar Z}{\partial \gamma} \cdot u$$

ist. Demnach bleibt noch übrig

$$\overline{X}\frac{\partial \log \overline{N}}{\partial x} + \overline{Y}\frac{\partial \log \overline{N}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{X}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} = 0.$$

$\overline{N}$ ist also in der That ein Multiplikator der übrig bleibenden Gleichung, was zu beweisen war.

Man nennt $\overline{N}$ auch den letzten Multiplikator, und den Satz das Prinzip des letzten Multiplikators, weil für die übrigbleibende (letzte) Gleichung sich ein Multiplikator ergiebt.

4. **Beispiel.** Gegeben sei die Gleichung

$$W(f) = (y + xz)\frac{\partial f}{\partial x} + yz\frac{\partial f}{\partial y} - z^2\frac{\partial f}{\partial z} = c.$$

Die Gleichung zur Bestimmung des Multiplikators lautet hier:

$$W(\log M) + z + z - 2z = 0.$$

Hieraus folgt, daß $M = 1$ ein Multiplikator ist.

Ferner ist

$$\varphi = yz$$

eine Lösung, denn es ist

$$W(yz) = (y + xz)\cdot 0 + yz^2 - yz^2 = 0.$$

Führt man nun die Variable γ ein durch die Substitution

$$z = \frac{\gamma}{y},$$

dann erhält man die Gleichung

$$\left(y + \frac{x\gamma}{y}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Hiervon muß nun

$$N = \frac{1}{y}$$

ein Multiplikator sein; demnach muß (§ 11, 1)

$$\frac{1}{y}\cdot\left\{\gamma\,dx - \left(y + \frac{x\gamma}{y}\right)dy\right\}$$

ein vollständiges Differential sein.

In der That ist auch (vgl. § 5, 2)

$$\frac{\partial\left(\frac{\gamma}{y}\right)}{\partial y} = -\frac{\gamma}{y^2} = \frac{\partial\left(-1 - \frac{x\gamma}{y^2}\right)}{\partial x}.$$

Es ist also noch das vollständige Differential

$$\frac{\gamma\,dx}{y} - \left(1 + \frac{\gamma x^2}{y^2}\right)dy$$

zu integrieren. Dabei ergiebt sich (§ 5, 2), wenn man die Anfangswerte von x bez. von y gleich Null setzt:

$$f(x,y) = \frac{\gamma x}{y} + \int_1^y \left(-1 - \frac{\gamma x}{y^2} + \frac{\gamma x}{y^2}\right) dy$$

$$= \frac{\gamma x}{y} - y + 1.$$

Demnach ist

$$f(x,y) - 1 = zx - y$$

eine Lösung, was man auch leicht bestätigen kann.

Bestimmt man dann aus den beiden Gleichungen

$$zy = c_1,$$

$$zx - y = c_2.$$

y und z als Funktionen von x, so erhält man die Lösungen

$$y = -\frac{c_2}{2} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + xc_1},$$

$$z = \frac{\frac{c_2}{2} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + xc_1}}{x}$$

des Systems:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yz}{y + xz},$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z^2}{y + xz}.$$

§ 24. Die singulären Punkte.

1. Definition der singulären Punkte. Wir wollen uns jetzt, entsprechend dem in § 19 behandelten Problem, die Aufgabe stellen, zu untersuchen, wie die Integralkurven des Systems

(1) $$\frac{dz}{dx} = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z}{a_1 x + b_1 y + c_1 z}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z}{a_1 x + b_1 y + c_1 z}$$

in der Umgebung des singulären Punktes

$$x = y = z = 0$$

verlaufen. Dieser Punkt ist singulär, weil die Werte der Differentialquotienten unbestimmt werden.

Dabei dürfen wir von vornherein die Voraussetzung machen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Würde sie nämlich verschwinden, so könnte man an Stelle von z die neue Variable

$$z_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

einführen, welche die Eigenschaft hat, daß

$$\frac{dz_1}{dx} = \frac{\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \gamma(a_3 x + b_3 y + c_3 z)}{(a_1 x + b_1 y + c_1 z)}$$

verschwindet, denn man kann dann die Gleichungen

$$a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma = 0,$$
$$b_1 \alpha + b_2 \beta + b_3 \gamma = 0,$$
$$c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma = 0$$

durch Größen befriedigen, welche nicht verschwinden.

Durch Einführung von z_1 würden aber die Gleichungen einfach die Form

$$\frac{dz_1}{dx} = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_2' x + b_2' y + c_2' z_1}{a_1' x + b_1' y + c_1' z_1}$$

erhalten, sich also, da z_1 zufolge der ersten Gleichung konstant ist, auf ein Problem in zwei Veränderlichen reduzieren, das bereits in § 19 behandelt ist.

2. **Die Normalform.** Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, durch eine lineare homogene Transformation neue Veränderliche einzuführen,

$$x_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$y_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,$$
$$z_1 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$

vermöge deren die Gleichungen die Form

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{\lambda_3 z_1}{\lambda_1 x_1}, \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\lambda_2 y_1}{\lambda_1 x_1}$$

annehmen.

Die dem System (1) äquivalente partielle Differentialgleichung muß dann die Form annehmen

$$\lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_3 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0.$$

Demnach muß die folgende Identität bestehen:

$$(2)\quad (a_1 x + b_1 y + c_1 z)\frac{\partial f}{\partial x} + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)\frac{\partial f}{\partial y} + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_3 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1},$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\{\alpha_1(a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \beta_1(a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \gamma_1(a_3 x + b_3 y + c_3 z)\},$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_1}\{\alpha_2(a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \beta_2(a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \gamma_2(a_3 x + b_3 y + c_3 z)\},$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z_1}\{\alpha_3(a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \beta_3(a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \gamma_3(a_3 x + b_3 y + c_3 z)\}.$$

Hieraus ergeben sich drei Systeme von je drei Gleichungen, von denen das erste lautet

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_1 - \lambda_1) + \beta_1 a_2 + \gamma_1 a_3 &= 0, \\ \alpha_1 b_1 + \beta_1(b_2 - \lambda_1) + \gamma_1 b_3 &= 0, \\ \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 + \gamma_1(c_3 - \lambda_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ganz ähnliche Gleichungen, in denen nur λ_2 und λ_3 an Stelle von λ_1 steht, bekommt man für $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Hieraus folgt zunächst, daß alle drei Größen λ die Gleichung

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = D(\lambda) = 0$$

erfüllen müssen. Hat diese Gleichung drei verschiedene Wurzeln, so kann man, indem man für λ_1, λ_2 und λ_3 diese drei Wurzeln nimmt, die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ so bestimmen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.[1]

[1] Vgl. Anhang I.

Durch diese Substitution erhält man also die Form

$$\frac{dx}{\lambda x} = \frac{dy}{\mu y} = \frac{dz}{\nu z}.$$

Wir wollen die Integralkurven nun geometrisch untersuchen.

3. **Reelle (von einander verschiedene) Wurzeln.** Zunächst haben wir also drei verschiedene reelle Wurzeln, welche sämtlich positiv sein mögen, und es sei:

$$\lambda < \mu < \nu.$$

Setzen wir $\frac{\mu}{\lambda} = \beta$, $\frac{\nu}{\lambda} = \gamma$, dann sind die Integralkurven gegeben durch die Gleichungen

$$y = b x^{\beta},$$
$$z = c x^{\gamma}.$$

Alle diese Integralkurven enthalten den Koordinatenanfang und berühren die x-Axe. Jede Kurve verläuft vom Koordinatenanfang an immer in demselben Oktanten, ferner befinden sich die ebenen Kurven

$$y = 0, \quad z = c x^{\gamma}$$

und

$$z = 0, \quad y = b y^{\beta}$$

unter diesen Integralkurven, ebenso die x-Axe.

Zu allen diesen Integralkurven treten dann noch die folgenden, ebenfalls durch den Koordinatenanfang gehenden hinzu:

$$x = 0,$$
$$z = c y^{\frac{\beta}{\gamma}},$$

welche in der yz-Ebene gelegen sind und die y-Axe berühren (vgl. Fig. 18). Alle diese Kurven berühren sich gegenseitig und stehen auf den zuerst besprochenen Kurven senkrecht.

Endlich ist die z-Axe selbst auch eine (isolierte) Integralkurve.

Charakteristisch ist, daß alle Kurven den Koordinatenanfang enthalten und dort eine von drei bestimmten Geraden berühren. Die z-Axe wird nur von $x = 0$, $y = 0$ selbst berührt, die y-Axe von allen in der yz-Ebene gelegenen Kurven, die x-Axe von allen übrigen Integralkurven. —

Haben die Wurzeln verschiedene Vorzeichen, so können wir folgende Größenverhältnisse annehmen: λ und μ sind positiv und ν negativ, ferner ist μ größer als λ. (Dies kann man, sobald unter den drei Wurzeln λ_1, λ_2 und λ_3 zwei dasselbe Zeichen haben, durch Änderung des Koordinatensystems sofort erreichen.)

Die Integralkurven sind dann gegeben durch die Gleichungen

$$y = b\,x^{\beta}, \quad \left(\beta = \frac{\mu}{\lambda}\right),$$
$$z = c\,x^{-\gamma}, \quad \left(\gamma = -\frac{\nu}{\lambda}\right).$$

Diejenigen Integralkurven, welche in der xy-Ebene gelegen sind, verlaufen also genau wie in Fig. 18, die, welche in der yz-Ebene liegen, und die, welche in der zx-Ebene liegen, geben das in Fig. 19 gezeichnete Bild. (Die Axen und die in der xy-Ebene gelegenen Kurven sind die einzigen Integralkurven, welche den Koordinatenanfang enthalten.)

Alle übrigen Integralkurven haben die z-Axe zur Asymptote und nähern sich andererseits der xy-Ebene, ohne sie übrigens je zu berühren.

4. **Konjugiert imaginäre Wurzeln.** Hat die charakteristische Gleichung für λ eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, so haben wir die folgende Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+ib)\,y}{(a-ib)\,x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{(a-ib)\,x}.$$

Damit diese Gleichung reell wird, führen wir ein

$$x_1 = x + iy,$$
$$y_1 = i(x - iy) = y + ix$$

und bekommen:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{dy}{dx} + i}{1 + i\frac{dy}{dx}} = \frac{(a+ib)\,y + (a-ib)\,i\,x}{(a-ib)\,x + i(a+ib)\,y} = \frac{a\,y_1 + b\,x_1}{a\,x_1 - b\,y_1}.$$

Die Integralkurven haben die Gleichung

$$\varrho = c\,e^{\frac{a}{b}\varphi}$$

(wo $x_1 = \varrho\cos\varphi$, $y_1 = \varrho\sin\varphi$ gesetzt ist).

Berechnet man nun noch z, so erhält man aus den Differentialgleichungen

$$z = c_1 \cdot e^{\frac{\varphi}{b}}.$$

Die beiden Gleichungen zusammen lehren, daß die Integralkurven schraubenähnlich gewunden sind; sie sind ferner auf Rotationsflächen gelegen, welche die z-Axe als Rotationsaxe haben.

Die Gleichung einer solchen Rotationsfläche ist

$$\varrho = c_2 z^a \text{ (wo } c_2 = c \cdot c_1^{-a} \text{ ist).}$$

Die Rotationsflächen haben entweder im Koordinatenanfang eine Spitze $\left(\text{wenn } 0 < \frac{1}{a} < 1\right)$, oder sie berühren die xy-Ebene $\left(\frac{1}{a} > 1\right)$, oder sie sind Kegel ($a = 1$), oder sie enthalten den Koordinatenanfang garnicht; die xy-Ebene ist dann eine asymptotische Tangentialebene ($a < 0$). Für $a = 0$ erhält man auf Cylindern gelegene Kurven, welche in immer engeren Windungen nach der xy-Ebene hin verlaufen.

In der xy-Ebene liegen ebenfalls Integralkurven, welche entweder ($a \gtrless 0$) logarithmische Spiralen oder ($a = 0$) Kreise sind.

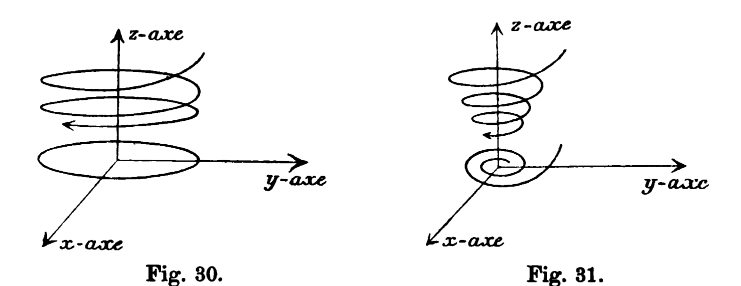


Fig. 30. Fig. 31.

Diese Integralkurven (für $a = 0$ Fig. 30, für $a = 1$ Fig. 31) werden durch vorstehende Figuren veranschaulicht. In allen diesen Fällen gehört die z-Axe mit zu den Integralkurven.

5. **Zwei gleiche Wurzeln.** Sind unter den Wurzeln der Gleichung dritten Grades (3) zwei gleiche, so kann man zunächst dem System (1) durch eine Transformation mit nicht verschwindender Determinante die Form geben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z + a_3 x + b_3 y}{x},$$

die sich nun weiter reduzieren läßt. Ist a_3 von Null verschieden, so erhält man, indem man setzt:

$$z_1 = x + \frac{b_3}{a_3(1-a)} y + \frac{z}{a_3},$$

die folgende Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}, \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{z_1 + x}{x}.$$

Schreibt man für z_1 wieder z, so bekommt man die folgenden Integralkurven:

$$y = c x^a,$$
$$z = x(c_1 + \log x).$$

Die Projektionen dieser Kurven sind also auf der $y x$-Ebene durch Fig. 18 oder 19, je nachdem a positiv oder negativ ist, gegeben, die auf die $x z$-Ebene durch Fig. 22. —

Ist dagegen $a_3 = 0$, so kann man durch die Substitution

$$z_1 = \frac{1-a}{b_3} z + y$$

die Normalform erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}, \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{z_1}{x}.$$

Hier sind nun alle Integralkurven in Ebenen gelegen, welche die y-Axe enthalten. In jeder dieser Ebenen haben wir dann Integralkurven, welche den Fig. 18 bez. 19 entsprechen.

6. **Drei gleiche Wurzeln.** Sind alle drei Wurzeln gleich, so kann man zuerst durch eine reguläre Transformation eine der beiden folgenden Normalformen erreichen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z + ax + by}{x}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z + ax + by}{x}.$$

Aus der ersten erhält man weiter, wenn b von Null verschieden ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z+y}{x},$$

oder, wenn b gleich Null ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z+x}{x},$$

woraus durch die Substitution $y_1 = y - z$ hervorgeht

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z+x}{x}.$$

Aus der zweiten erhält man entweder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z+x}{x},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}.$$

Demnach haben wir endlich, wenn alle drei Wurzeln gleich sind, die Normalformen

(erstens) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y+z}{x}$$

mit den Integralkurven

$$y = x(c + \log x), \quad z = x\left(c_1 + c\log x + \tfrac{1}{2}(\log x)^2\right),$$

welche durch den Koordinatenanfang gehen und die z-Axe in ihm berühren, die in diesem Falle die einzige ebene Integralkurve ist;

(zweitens) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z+x}{x}$$

mit den Integralkurven

$$y = cx,$$

$$z = x(c_1 + \log x),$$

welche in Ebenen gelegen sind, die die z-Axe enthalten und dort verlaufen, wie dies Fig. 22 angiebt. Auch hier ist die z-Axe die einzige geradlinige Integralkurve;

(drittens) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

giebt die geraden Linien durch den Koordinatenanfang.

§ 25. Die vollständigen Systeme.

1. **Eingliedrige Flächenscharen.** Aus der Gleichung einer eingliedrigen Flächenschar

$$f(x, y, z) = c$$

bekommt man durch Differentiation die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Umgekehrt bestimmen die beiden in $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ linearen, homogenen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung die Flächenschar

$$f(x, y, z) = \text{constans}.$$

Wir wollen allgemein zwei solche Gleichungen

$$W_1 f = X_1(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x} + Y_1(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y} + Z_1(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$W_2 f = X_2(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x} + Y_2(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y} + Z_2(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

dann ein **vollständiges System** nennen, wenn sie zusammen eine eingliedrige Flächenschar bestimmen.

Zwei Gleichungen $W_1 f = 0$ und $W_2 f = 0$ bilden nicht immer ein vollständiges System, wie das folgende Beispiel lehrt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Aus der ersten Gleichung würde folgen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

aus der zweiten

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

und diese beiden Gleichungen widersprechen sich.

2. **Die Bedingung des vollständigen Systems.** Damit zwei Gleichungen ($W_1 f = 0$ und $W_2 f = 0$) ein vollständiges System bilden, ist notwendig und hinreichend, daß die aus ihnen berechneten Werte für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Forderung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

erfüllen.

Berechnen wir zunächst $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, so kommt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{Y_2 Z_1 - Y_1 Z_2}{X_1 Y_2 - Y_1 X_2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{X_1 Z_2 - X_2 Z_1}{X_1 Y_2 - Y_2 X_1},$$

wofür wir zur Abkürzung setzen wollen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Hieraus bekommt man nun die Forderung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\gamma^2}\cdot\left\{\left(-\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)\gamma + \alpha\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \gamma}{\partial z}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{\gamma^2}\cdot\left\{\left(-\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)\gamma + \beta\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial z}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right\}$$

oder

$$\alpha\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)=0.$$

Wenn also diese Forderung erfüllt ist, in der die Größen α, β und γ die Bedeutungen haben

$$\gamma = X_1 Y_2 - Y_1 X_2,$$
$$\alpha = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2,$$
$$\beta = Z_1 X_2 - X_1 Z_2,$$

dann bilden die gegebenen Gleichungen ein vollständiges System. Die gefundene Bedingung kann man noch auf die Form bringen

$$\begin{vmatrix} W_1(X_2) - W_2(X_1), X_1, X_2 \\ W_1(Y_2) - W_2(Y_1), Y_1, Y_2 \\ W_1(Z_2) - W_1(Z_1), Z_1, Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. **Integrationsmethode.** Wenn die Gleichungen

$$W_1 f = 0 \quad \text{und} \quad W_2 f = 0$$

ein vollständiges System bilden, so unterscheidet sich der Ausdruck

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$$

nur durch einen Faktor von dem vollständigen Differential von f. Die Integration läßt sich auf ein Problem in zwei Veränderlichen reduzieren durch folgende Überlegung: Schneidet man die Integralflächen mit den Ebenen einer Schar (z. B. den Ebenen $y = cx$), so erhält man die Kurven, welche durch die Gleichung

$$\big(\alpha(x, cx, z) + c\beta(x, cx, z)\big)\, dx + \gamma(x, cx, z)\, dz = 0$$

bestimmt werden, also durch eine Gleichung erster Ordnung in zwei Variabeln.

Man braucht nun nur diese Gleichung zu integrieren, um alle Integralkurven zu bestimmen; denn man erhält die Integralflächen, indem man alle von einem Punkt der Axe jenes Ebenenbüschels (der z-Axe) ausgehenden Kurven, welche in den verschiedenen Ebenen liegen, zusammenfaßt, d. h. indem man in der Gleichung der Kurven die Größe c wieder ersetzt durch ihren Wert $\frac{y}{x}$.

4. **Beispiel.** Die beiden Gleichungen

$$W_1(f) = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$W_2(f) = \frac{z}{x-y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{z}{x-y}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

bilden ein vollständiges System, denn die drei Größen

$$\alpha = x, \quad \beta = y, \quad \gamma = -\frac{yz - zx}{x - y} = z$$

erfüllen die Bedingung

$$\alpha\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) = 0.$$

Wendet man auf den Ausdruck

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

die Integrationsmethode an, so kommt

$$x(1 + c) + z\frac{dz}{dx} = 0,$$

oder

$$z^2 + x^2(1 + c) = \text{constans}\,(= z_0^2),$$

d. h.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{constans} = z_0^2.$$

Viertes Kapitel.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln.

§ 26. Existenzbeweis für die Lösungen der partiellen Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.

1. **Analytischer Beweis durch Reduktion auf ein lineares System.** Wir können den im ersten Kapitel, § 10, erbrachten Beweis für die Existenz von analytischen Lösungen von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung anwenden, um auch die Existenz der Lösungen von einer Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

zu beweisen. (p und q sind hier zur Abkürzung gesetzt, und haben die Bedeutungen

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.\Big)$$

Nun wollen wir die Gleichung nach p auflösen, sodaß sie die Form hat

$$p = f(x, y, z, q), \tag{1'}$$

wo f ebenso wie vorhin F eine analytische Funktion ihrer Argumente ist (§ 2).

Nun wenden wir einen Kunstgriff an; indem wir die gegebene Differentialgleichung (1'), welche nicht linear ist, ersetzen durch ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen. Auf dieses System, welches freilich an Stelle der einen abhängigen Variabeln z deren drei enthält, nämlich die Größen z, p und q, können wir dann den früheren Existenzbeweis anwenden.

Das System lautet nämlich so

$$(1'')\qquad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= p \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}$$

und der Lösung schreiben wir folgende Anfangsbedingungen vor: Es sollen für $x = x_0$ die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} z = \psi(y), \quad & q = \psi'(y), \\ p = f(x_0, y&, \psi(y), \psi'(y)) \end{aligned}$$

erfüllt sein.

Die Existenz der Lösungen dieses Gleichungssystems folgt aus dem allgemeinen Satz in § 10.

Diese Lösungen bezeichnen wir folgendermaßen:

$$z = Z(x,y), \qquad p = P(x,y), \qquad q = Q(x,y)$$

und wollen nun beweisen, daß die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

erfüllt ist, überdies aber die Anfangsbedingung

$$Z(x_0, y) = \psi(y).$$

Zunächst ist jedenfalls wegen der ersten Gleichung (1'')

$$P(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial x},$$

und wegen der letzten Gleichung (1'') ist

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}.$$

Also ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = 0,$$

d. h. es ist $Q - \frac{\partial Z}{\partial y}$ eine Funktion von y allein. Diese Funktion reduziert sich überdies wegen der zweiten Anfangsbedingung für $x = x_0$ auf Null. Sie verschwindet demnach identisch. Es ist also

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

für jeden Wert von x und y.

Ganz analog kann man zeigen, daß wegen der zweiten Gleichung (1'') die Funktion

$$P - f(x, y, Z, Q)$$

von x unabhängig ist, daß sie daher beständig gleich Null ist, weil sie wegen der dritten Anfangsbedingung (2) für $x = x_0$ verschwindet.

Die Funktion Z erfüllt also die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - f\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = 0.$$

Sie genügt der Anfangsbedingung, daß für $x = x_0$

$$z = \psi(y)$$

ist.

Hierdurch ist also (unter der selbstverständlichen Voraussetzung, daß die Funktion $f(x, y, z, q)$ regulär ist) der geforderte Existenzbeweis erbracht.

2. **Geometrische Deutung des Resultates.** Deutet man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten, so hat das gefundene Resultat einen sehr einfachen geometrischen Sinn.

Verstehen wir nämlich unter „Integralfläche" eine Fläche, die durch eine Gleichung

$$z = Z(x, y)$$

dargestellt wird, wo Z die gegebene Differentialgleichung erfüllt, so lehrt der analytische Existenzbeweis folgendes:

Man kann durch die Kurve

$$x = x_0, \quad z = \psi(y)$$

eine Integralfläche legen; umgekehrt ist auch die Integralfläche vollkommen bestimmt durch die Forderung, daß sie diese Kurve enthalten soll. —

Statt der Kurve

$$z = \psi(y),$$

welche in der Ebene $x = x_0$ gelegen ist, kann man natürlich auch irgend eine andere Kurve nehmen, welche in der Ebene $x = x_0$ gelegen ist; nur muß immer für $x = x_0$ die Funktion

$$p = f(x_0, y, \psi(y), \psi'(y))$$

regulär sein.

3. **Die vollständige Lösung.** Einen Überblick über die ganze Mannigfaltigkeit der möglichen Lösungen (oder Integralflächen) zu gewinnen, wird uns erst später gelingen. Vorläufig wollen wir uns damit begnügen, die Existenz der vollständigen Lösung nachzuweisen.

Darunter soll eine Lösung von der Form

$$z = \omega(x, y, a, b)$$

verstanden werden, wobei die Konstanten a und b beide wesentlich sind (vgl. § 9, 2); d. h. es soll die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\omega_x, \omega_y)}{\partial(a, b)}$$

nicht verschwinden. Außerdem sollen die Konstanten a und b in einem gewissen Bereiche variieren können.

Um die Existenz einer solchen vollständigen Lösung nachzuweisen, schicken wir folgendes voraus:

Es sei etwa

$$\psi(y) = a + by + \ldots,$$

wo der nicht hingeschriebene Teil der Reihenentwickelung mit einem Glied von mindestens zweiter Ordnung beginnt.

Dann giebt es eine Lösung von der Form

$$z = a + by + \ldots,$$

wo die nicht hingeschriebene weitere Entwickelung mit Gliedern beginnt, die in x und y mindestens von der zweiten Ordnung sind.

Die Größen a und b können verschieden angenommen werden. Sie können in einem bestimmten Bereich variieren, ohne daß die Reihenentwickelung von z zu konvergieren aufhört.

Außerdem wollen wir annehmen, daß die aufgelöste Differentialgleichung die Form hat

$$p = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 q + \ldots,$$

wobei jedenfalls die Größe α_3 von Null verschieden ist. (Mit anderen Worten: Es soll die Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

die Größen z und p wirklich enthalten.)

Wir können jetzt die Anfangsglieder der Reihenentwickelung von z leicht berechnen.

Es sei nämlich etwa

$$z = a + by + x\left(a_1 + \frac{a_{11} x}{2} + a_{12} y\right) + \ldots,$$

so dient zur Berechnung der ersten Koeffizienten die zu erfüllende Identität:

$$a_1 + a_{11} x + a_{12} y = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 (a + by) + \alpha_4 (b + a_{12} x),$$

welche sich in drei Gleichungen zerlegt, von denen wir aber nur die erste brauchen, nämlich die Gleichung

$$a_1 = \alpha_3 a + \alpha_4 b.$$

Da α_3 von Null verschieden ist, so enthält a_1 sicher die Größe a, und es wird

$$\left|\frac{\partial(\omega_x, \omega_y)}{\partial(a, b)}\right|_{x=y=0} = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_3.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ verschwindet also die Funktionaldeterminante nicht, und hieraus folgt, daß sie jedenfalls für hinreichend kleine Werte von x und y nicht verschwindet.

Hierdurch ist die Existenz der vollständigen Lösung erwiesen, zunächst allerdings unter der Voraussetzung, daß die aufgelöste Gleichung

$$p = f(x, y, z, q)$$

in z linear ist. Ist sie nicht von vornherein in z linear, so kann man das durch eine Transformation von der Form

$$z_1 = z + c$$

erreichen. Enthält sie die Größe z überhaupt nicht, so muß man andere Transformationen vornehmen.

§ 27. Flächenelemente und Flächenelementvereine im Raum.

1. **Definition des Flächenelementes.** Um später die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in einer Form behandeln zu können, welche eine bequeme Übersicht über die Art und die Mannigfaltigkeit der Integralgebilde gestattet, müssen wir uns mit dem Begriff des Flächenelementes vertraut machen.

Unter einem *Flächenelement* des Raumes verstehen wir ein geometrisches Gebilde, welches besteht aus einem Punkt (x, y, z) und einer Ebene, welche diesen Punkt enthält. Die Gleichung einer solchen Ebene hat die Form

$$(\xi - x)p + (\eta - y)q - (\zeta - z) = 0,$$

wo ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Punktes sind, der sich auf der Fläche befindet.

Die fünf Größen x, y, z, p, q sind zur Bestimmung eines Flächen-

elementes notwendig und ausreichend. Es giebt also ∞^5 Flächenelemente im Raum (zu jedem Punkt x, y, z gehören noch ∞^2 Flächenelemente).

Den Punkt x, y, z wollen wir den *„Träger“* des Flächenelementes nennen; später werden wir ihn auch als *„Träger nullter Stufe“* bezeichnen.

Für die geometrische Vorstellung ist es bequem, nicht die ganze Ebene in Betracht zu ziehen, sondern nur die Umgebung des Trägers; denn nur diese ist bei der Anwendung des Begriffes Flächenelement zu beachten. Das Flächenelement ist also schließlich als ein schuppenförmiges Gebilde aufzufassen.

2. **Vereine von Flächenelementen und ihre Dimension.** Wir sagen, daß eine k-dimensionale (§ 3, 3) Schar von Flächenelementen

$$
\begin{aligned}
x &= x(t_1 \ldots t_k), \\
y &= y(t_1 \ldots t_k), \\
z &= z(t_1 \ldots t_k), \\
p &= p(t_1 \ldots t_k), \\
q &= q(t_1 \ldots t_k)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

einen Verein bildet, wenn die Gleichungen

$$
\frac{\partial z}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} - q\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0, \qquad i = 1 \ldots k
\tag{2}
$$

erfüllt sind.

3. **Die Maximalzahl k für die Dimension eines Flächenelementvereines.** Zunächst wollen wir zeigen, daß die Dimension eines Vereines von Flächenelementen nicht größer als zwei sein kann. Wäre sie nämlich gleich drei, dann müßte einer der folgenden Fälle vorliegen:

a) x, y, z sind unabhängige Funktionen von drei Veränderlichen (t_1, t_2, t_3). Wegen (2) müßten dann die Relationen erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t_1} - p\frac{\partial x}{\partial t_1} - q\frac{\partial y}{\partial t_1} &= 0, \\
\frac{\partial z}{\partial t_2} - p\frac{\partial x}{\partial t_2} - q\frac{\partial y}{\partial t_2} &= 0, \\
\frac{\partial z}{\partial t_3} - p\frac{\partial x}{\partial t_3} - q\frac{\partial y}{\partial t_3} &= 0.
\end{aligned}
$$

Das ist aber nicht möglich, weil ja der Voraussetzung nach die für das Zusammenbestehen dieser drei Gleichungen notwendige Vorbedingung, nämlich das Verschwinden der Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_1} \\ \frac{\partial z}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \\ \frac{\partial z}{\partial t_3} & \frac{\partial x}{\partial t_3} & \frac{\partial y}{\partial t_3} \end{vmatrix},$$

nicht erfüllt ist.

b) Sind x, y, z unabhängige Funktionen von zwei Veränderlichen, so sind p und q durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial t_1} - p\frac{\partial x}{\partial t_1} - q\frac{\partial y}{\partial t_1} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_2} - p\frac{\partial x}{\partial t_2} - q\frac{\partial y}{\partial t_2} = 0$$

mitbestimmt als Funktionen von t_1 und t_2, wenn nicht etwa die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Verschwindet diese Determinante, so läßt sich durch Einführung von anderen Koordinaten erreichen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, sobald nur nicht etwa alle drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_2} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_1} \\ \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Dann würden aber x, y und z nicht mehr unabhängige Funktionen von t_1 und t_2 sein.

c) Sind x, y, z Funktionen e i n e r unabhängigen Veränderlichen t, so lehrt die Gleichung

$$\frac{dz}{dt} - p\frac{dx}{dt} - q\frac{dy}{dt} = 0,$$

daß der Verein zweidimensional (höchstens) sein kann. Denn diese Gleichung bestimmt ja q als Funktion von p und t.

d) Sind x, y, z konstant, haben also alle Elemente einen gemeinsamen Träger, so können p und q beliebig variieren; der Verein ist also höchstens zweidimensional.

Das Resultat, was wir durch Untersuchung der einzelnen Fälle gefunden haben, ist also:

Es giebt keine Flächenelementvereine, deren Dimension größer als zwei ist.

4. **Zweidimensionale Flächenelementvereine.** Hier unterscheiden wir wieder verschiedene Fälle, je nach der Anzahl der unabhängigen Variabeln, durch welche z, x und y dargestellt werden.

a) Wenn x, y und z Funktionen von zwei unabhängigen Variabeln sind, so kann man etwa (und das läßt sich durch Koordinatentransformation immer erreichen)

$$z = f(x, y)$$

annehmen. Dann ist nach (2) weiter

$$\frac{\partial z}{\partial x} - p = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - q = 0.$$

p und q sind dann also einfach die partiellen Differentialquotienten von z.

Nun stellt aber weiterhin bekanntlich

$$(\zeta - z) - p(\xi - x) - q(\eta - y) = 0,$$

welches die Gleichung der zum Flächenelement x, y, z, p, q gehörigen Ebene ist (§ 27, 1), zugleich auch Tangentialebene an die Fläche

$$z = f(x, y)$$

im Punkte x, y, z dar.

Die Flächenelemente des Vereines sind also durch die Punkte der Fläche, zusammen mit den Tangentialebenen, definiert, und wir wollen daher diese Elemente kurzweg als *„die Elemente der Fläche* $z = f(x, y)$*"* bezeichnen, und den Elementverein mit dem Zeichen F_2.

b) Im zweiten Fall werden x, y, z als Funktionen eines Parameters angenommen; die Träger der Elemente bilden also eine Kurve.

Wir wollen etwa

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x)$$

setzen und haben dann als weitere Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - q\frac{dy}{dx} - p = 0.$$

Diese Gleichung hat eine einfache Bedeutung. Sie lehrt nämlich, daß die Ebene des Flächenelementes die Tangente der von den Trägern gebildeten Kurve enthält.

Die Gleichung der Tangente ist ja

$$\zeta - z = a\frac{dz}{dx},$$
$$\xi - x = a,$$
$$\eta - y = a\frac{dy}{dx},$$

und andererseits ist die Gleichung der Ebene des Flächenelementes

$$(\zeta - z) - p(\xi - x) - q(\eta - y) = 0.$$

Aus der Gleichung (2) folgt dann die Richtigkeit unserer Behauptung. Dieser Verein besteht also aus allen Elementen, deren Träger auf der — übrigens beliebig zu wählenden — Kurve

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x)$$

liegen, während die Ebenen die Kurve berühren. Einen solchen Verein wollen wir mit C_2 bezeichnen, um anzudeuten, daß die Träger auf einer Kurve liegen und daß der Verein zweidimensional ist.

c) Wenn endlich x, y, z konstant, so können p und q beliebig variieren, und wir erhalten so den zweidimensionalen Verein aller Elemente, die einen gemeinsamen Träger P haben. Einen solchen Verein wollen wir mit P_2 bezeichnen. (Der Punkt ist Träger dieses zweidimensionalen Vereins.)

Also haben wir das folgende Resultat gefunden:

Es giebt im Raume drei Arten von zweidimensionalen Flächenelementvereinen: erstens die Elemente einer beliebigen Fläche (F_2), zweitens die Elemente einer Kurve (C_2) und drittens die Elemente eines Punktes (P_2).

5. **Eindimensionale Flächenelementvereine.** Von eindimensionalen Flächenelementvereinen unterscheiden wir folgende Arten:

a) Die Träger bilden eine Kurve

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x).$$

Dann sind p und q noch so als Funktionen von x zu bestimmen, daß die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - p - q\frac{dy}{dx} = 0$$

erfüllt ist. Die Bedeutung dieser Gleichung ist, daß die Ebenen der Elemente die Kurve berühren. Wir wollen einen solchen Verein einen „Elementstreifen“ nennen und ihn mit C_1 bezeichnen. (Die Kurve wird hier der Ort der Träger eines *eindimensionalen* Flächenelementvereins.)

b) Alle Elemente haben einen gemeinsamen Träger und berühren einen Kegel. Dieser Fall entsteht dann, wenn x, y, z konstant sind und die Gleichung zwischen p und q nicht linear ist.

Dann stellt ja die Gleichung

$$f(p, q) = 0$$

zusammen mit

$$(\zeta - z) - p(\xi - x) - q(\eta - y) = 0$$

eine Schar von Ebenen dar, welche einen Kegel berühren, dessen Spitze der Punkt x, y, z ist. Wir nennen diesen Kegel einen *Elementarkegel* und bezeichnen den Verein mit K_1.

c) Artet der Kegel im speziellen in eine gerade Linie aus, ist also die Gleichung linear (etwa

$$f(p, q) = \alpha p + \beta q - \gamma = 0),$$

so bezeichnen wir den Verein mit L_1, weil alle Ebenen eine bestimmte durch den Punkt x, y, z gehende gerade Linie enthalten. Diese gerade Linie wird dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma}.$$

Indem wir den Begriff „Linienelement“ von der Ebene in den Raum übertragen, also als Linienelement den Inbegriff von Punkt und Richtung bezeichnen, können wir die Beziehung zwischen den verschiedenen Flächenelementen des Vereines L_1 auch so ausdrücken: *Alle Flächenelemente des Vereins L_1 haben ein gemeinsames Linienelement.*

Demnach haben wir also drei Klassen von eindimensionalen Elementvereinen: Die Vereine C_1 oder Elementstreifen, die Vereine K_1 oder Elementarkegel, und endlich die Vereine L_1 oder Linienelemente.

(Die beiden letztgenannten Klassen können wir auch gemeinsam als „Vereine P_1“ bezeichnen.)

6. **Beispiele von Flächenelementvereinen.** Wir wollen noch für jede Art von Vereinen ein einfaches Beispiel angeben, um uns mit den Begriffen vertraut zu machen:

Zweidimensionale Elementvereine.

a) $z = 0,\ p = 0,\ q = 0$ (Fläche; speziell xy-Ebene);

b) $z = 0,\ y = 0,\ p = 0$ (C_2; speziell x-Axe);

c) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (P_2; und zwar Koordinatenanfangspunkt).

Eindimensionale Elementvereine.

a) $z = 0$, $y = 0$, $p = 0$, $q = 0$ (C_1; die Trägerkurve ist die x-Axe);

b) $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $p^2 + q^2 = 1$ (K_1; die Gleichung des Elementarkegels ist $x^2 + y^2 - z^2 = 0$);

c) $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$ (L_1; die Gerade, welche in allen Ebenen liegt oder Axe des Ebenenbüschels ist, hat die Gleichung $z = y = 0$).

§ 28. Berührung von Flächenelementvereinen.

1. **Fläche und Flächenelementverein.** Von allen den Gebilden, die wir im vorigen Paragraphen unter dem Namen „Flächenelementvereine" kennen gelernt haben, sind in der gewöhnlichen Geometrie nur die Vereine F_2 bekannt. Es ist bekannt, daß eine Fläche aufgefaßt werden kann entweder als Punktgebilde oder als Umhüllungsgebilde von Tangentialebenen. Berücksichtigt man diese beiden Auffassungen gleichzeitig, so gelangt man eben dazu, die Fläche als ein aus Flächenelementen bestehendes Gebilde aufzufassen. Der Name „Flächenelement" hat ja auch gerade daher seinen Ursprung, daß man die Flächenelemente als diejenigen Elementargebilde betrachtet, welche eine Fläche zusammensetzen.

Wie nun der Begriff „Fläche" sich dem allgemeinen Begriffe „Verein von Flächenelementen" unterordnet, so wollen wir jetzt auch den Begriff der Berührung zweier Flächen verallgemeinern.

2. **Berührung zweier zweidimensionaler Elementvereine in einem Flächenelement.** Wir definieren die Berührung folgendermaßen: *Zwei Flächenelementvereine berühren sich, wenn sie ein gemeinsames Flächenelement haben.*

a) Zum Beispiel berühren sich zwei Flächen, wenn sie einen Punkt und in ihm die Tangentialebene gemein haben. So berührt die Ebene $z = 0$ die Kugel $(z - 1)^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$, weil das Element

$$x = y = z = p = q = 0$$

den beiden Elementvereinen

$$z = p = q = 0$$

und

$$z^2 - 2z + x^2 + y^2 = 0, \quad p = \frac{x}{1 - z}, \quad q = \frac{y}{1 - z}$$

gleichzeitig angehört.

b) Ebenso berühren sich eine C_2 und eine Fläche in einem gemeinsamen Punkt, wenn die Kurventangente in der Tangentialebene der Fläche liegt; denn beide Vereine haben dann ein gemeinsames Element.

So haben die im vorigen Beispiel genannte Kugel und die x-Axe das gemeinsame Element

$$x = y = z = p = q = 0.$$

c) Zwei sich schneidende C_2 haben ein gemeinsames Element in ihrem Schnittpunkt (also z. B. die x-Axe und die y-Axe haben das gemeinsame Element $x = y = z = p = q = 0$).

d) Ein Punkt (P_2) und eine Fläche haben ein gemeinsames Element, wenn der Punkt auf der Fläche liegt. (Beispiel: $x = y = z = 0$ sei der Punkt, $z = p = q = 0$ die Fläche. Das gemeinsame Element hat die Koordinaten $x = y = z = p = q = 0$.)

Mit diesen vier verschiedenen Fällen sind alle Möglichkeiten der Berührung zweier zweidimensionaler Elementvereine in einem einzigen Flächenelement erschöpft.

3. **Berührung zweidimensionaler Elementvereine in allen Elementen eines Vereins.** Zwei zweidimensionale Flächenelementvereine können aber auch eine ganze (eingliedrige) Schar von gemeinsamen Flächenelementen besitzen, die natürlich dann ein eindimensionaler Elementverein sein muß.

a) Zwei Flächen können eine gemeinsame C_1 besitzen; z. B. berühren sich der Cylinder $x^2 + 2z = 0$ und die xy-Ebene längs der Geraden $x = z = 0$. Den beiden Vereinen, welche durch die Elemente dieser beiden Flächen gebildet werden, gehören also gemeinsam an die Elemente des Vereins, dessen Gleichung lautet:

$$x = z = p = q = 0.$$

b) Zwei C_2, welche die Eigenschaft haben, daß ihre Trägerkurven sich in einem Punkt berühren, haben ein gemeinsames L_1, nämlich alle Flächenelemente, deren Träger der gemeinsame Punkt der Kurven ist, und deren Ebenen die gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Kurven in diesem Punkt sind.

Beispiel:

$$x^2 + 2y = 0, \quad z = 0$$

und

$$x = 0, \quad z = 0$$

seien die beiden Kurven; dann ist

$$x = y = z = p = 0$$

das gemeinsame L_1.

c) Eine Fläche und eine C_2, deren Punkte auf der Fläche liegen, haben einen gemeinsamen Verein C_1.

Beispiel:

$$x^2 + 2z = 0$$

und

$$x = z = 0$$

haben gemeinsam den Streifen

$$x = z = p = q = 0.$$

d) Ein P_2 und eine C_2 haben ein gemeinsames L_1, wenn der Träger von P_2 auf der Kurve liegt.

Beispiel:

$$x = y = z = 0$$

und

$$y = z = 0$$

haben das gemeinsame L_1

$$x = y = z = p = 0.$$

Mit diesen vier verschiedenen Fällen sind alle Arten erschöpft, wie zwei zweidimensionale Flächenelementvereine einen gemeinsamen eindimensionalen Flächenelementverein haben können.

4. **Umhüllungsgebilde.** Eine Flächenschar, welche zweigliedrig ist, kann eine Fläche umhüllen. Z. B. umhüllt die Gesamtheit aller Tangentialebenen einer Kugel eben diese Kugel. Benützt man den Begriff „Flächenelementverein", so hat die Umhüllungsbeziehung folgende Bedeutung: *Die eingehüllte Fläche ist ein zweidimensionaler Elementverein* (F_2), *welcher mit jedem Elementverein der Schar ein Element gemein hat.*

Wir wollen hierauf den allgemeinen Begriff „Umhüllung" bei Flächenelementvereinen entnehmen, den wir durch den soeben ausgesprochenen Satz definieren.

Hiernach kann z. B. jede Ebene aufgefaßt werden als Umhüllungsgebilde aller Vereine P_2, deren Träger sie enthält. Ferner umhüllen alle C_2, deren Trägerkurven in einem Punkte sich berühren, den Verein L_1, welcher aus allen, das gemeinsame Linienelement dieser Kurven enthaltenden Flächenelementen besteht u. s. w.

§ 29. Definition und Eigenschaften der Berührungstransformationen.

1. **Definition der Berührungstransformationen.** Unter einer Berührungstransformation des R_3 (genauer gesagt: Unter *einer Berührungstransformation der Flächenelemente des dreimensionalen Raumes*)

verstehen wir eine durch analytische Funktionen gegebene Transformation:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= X(x, y, z, p, q),\\
y_1 &= Y(x, y, z, p, q),\\
z_1 &= Z(x, y, z, p, q),\\
p_1 &= P(x, y, z, p, q),\\
q_1 &= Q(x, y, z, p, q),
\end{aligned}
$$

bei der jeder Elementverein wieder in einen Elementverein übergeht.

Wir verlangen also von den Formeln (1) erstens, daß sie eine wirkliche Transformation darstellen, d. h. daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(X, Y, Z, P, Q)}{D(x, y, z, p, q)}$$

nicht verschwindet.

Zweitens verlangen wir, daß bei dieser Transformation jeder Elementverein wieder in einen Elementverein übergeht.

Diese zweite Forderung führt auf die Gleichungen

$$(2)\qquad \frac{\partial z_1}{\partial t_i} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_i} - q_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_i} = \varrho \left(\frac{\partial z}{\partial t_i} - p \frac{\partial x}{\partial t_i} - q \frac{\partial y}{\partial t_i} \right).$$

Wenn nämlich die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= x(t_1, t_2),\\
y &= y(t_1, t_2),\\
z &= z(t_1, t_2),\\
p &= p(t_1, t_2),\\
q &= q(t_1, t_2)
\end{aligned}
$$

einen Elementverein darstellen, also die Relationen

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} - p \frac{\partial x}{\partial t_i} - q \frac{\partial y}{\partial t_i} = 0, \qquad i = 1, 2$$

erfüllen, so sollen die Formeln

$$x_1 = X\big(x(t_1, t_2),\ y(t_1, t_2),\ z(t_1, t_2),\ p(t_1, t_2),\ q(t_1, t_2)\big)$$

u. s. w. ebenfalls einen Verein darstellen, d. h. es soll dann auch

$$\frac{\partial Z}{\partial t_i} - P \frac{\partial X}{\partial t_i} - Q \frac{\partial Y}{\partial t_i} = 0$$

sein. Das gleichzeitige Verschwinden der beiden Ausdrücke fordert aber, daß sie sich nur um einen Faktor unterscheiden.

2. **Ein notwendiges Kriterium.** Nehmen wir beispielsweise der Reihe nach $t_1 = x, y, z, p, q$, so kommen wir zu den Formeln:

$$(2') \qquad \begin{aligned} -p\varrho &= \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - P\frac{\partial X}{\partial x} - Q\frac{\partial Y}{\partial x}\right), \\ -q\varrho &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial y} - Q\frac{\partial Y}{\partial y}\right), \\ \varrho &= \left(\frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z}\right), \\ 0 &= \frac{\partial Z}{\partial p} - P\frac{\partial X}{\partial p} - Q\frac{\partial Y}{\partial p}, \\ 0 &= \frac{\partial Z}{\partial q} - P\frac{\partial X}{\partial q} - Q\frac{\partial Y}{\partial q}. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt umgekehrt wieder, daß die Relation (1) für jeden Elementverein besteht.

Wir können also die allgemeinen Formeln (2) durch diese speziellen Formeln ersetzen. —

Die Funktion ϱ muß von Null verschieden sein; denn es würde sonst jede dreireihige Determinante der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial p} \\ \frac{\partial Z}{\partial q} & \frac{\partial X}{\partial q} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix}$$

verschwinden müssen, damit die Gleichungen (2) keinen Widerspruch enthalten. Das Verschwinden aller dieser dreireihigen Determinanten würde aber zur Folge haben, daß entgegen der ersten Forderung die Determinante

$$\frac{D(X, Y, Z, P, Q)}{D(x, y, z, p, q)}$$

verschwindet.

Der Ausdruck

$$\varrho = \frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z}$$

muß also von Null verschieden sein.

Schließlich wollen wir den Gleichungen (2) noch eine andere Gestalt geben, indem wir die Größe ϱ eliminieren und außerdem zur Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{dF}{dx}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{dF}{dy}$$

setzen. Die fünf Gleichungen (2′) lassen sich dann ersetzen durch die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{dZ}{dx} - P\frac{dX}{dx} - Q\frac{dY}{dx} = 0, \\ &\frac{dZ}{dy} - P\frac{dX}{dy} - Q\frac{dY}{dy} = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial p} - P\frac{\partial X}{\partial p} - Q\frac{\partial Y}{\partial p} = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial q} - P\frac{\partial X}{\partial q} - Q\frac{\partial Y}{\partial q} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Diese vier Gleichungen, verbunden mit der Bedingung

$$\varrho = \frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z} \neq 0,$$

sind also jedenfalls *notwendig*.

3. **Umformung der Bedingungen.** Wir wollen zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind. Das ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(X, Y, Z, P, Q)}{D(x, y, z, p, q)}$$

nicht verschwindet, sobald die Bedingungen (3) erfüllt sind.

Dies wollen wir jetzt zeigen mit Hilfe der folgenden Betrachtung:

Gegeben sei ein zweidimensionaler Elementverein, der sich wieder, wie wir schon wissen, in einen Elementverein verwandelt.

Es sind also die beiden Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial t_1} - p\frac{\partial x}{\partial t_1} - q\frac{\partial y}{\partial t_1} = 0, \\ &\frac{\partial z}{\partial t_2} - p\frac{\partial x}{\partial t_2} - q\frac{\partial y}{\partial t_2} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

und daher auch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial t_1} - P\frac{\partial X}{\partial t_1} - Q\frac{\partial Y}{\partial t_1} = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial t_2} - P\frac{\partial X}{\partial t_2} - Q\frac{\partial Y}{\partial t_2} = 0. \end{aligned} \tag{4′}$$

Außerdem ist

$$\varrho = \frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z},$$

wenn man darin für x, y, z, p, q ihre Werte als Funktionen von t_1 und t_2 einsetzt, eine Funktion von t_1 und t_2.

Jetzt wollen wir die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} - P\frac{\partial X}{\partial t_1} - Q\frac{\partial Y}{\partial t_1} - \varrho\left(\frac{\partial z}{\partial t_1} - p\frac{\partial x}{\partial t_1} - q\frac{\partial y}{\partial t_1}\right) = 0$$

nach t_2 differenzieren, wobei sich ergiebt

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial P}{\partial t_2}\frac{\partial X}{\partial t_1} - \frac{\partial Q}{\partial t_2}\frac{\partial Y}{\partial t_1} - P\frac{\partial^2 X}{\partial t_1 \partial t_2} - Q\frac{\partial^2 Y}{\partial t_1 \partial t_2}$$
$$- \frac{\partial \varrho}{\partial t_2}\left(\frac{\partial z}{\partial t_1} - p\frac{\partial x}{\partial t_1} - q\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)$$
$$- \varrho\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t_1 \partial t_2} - p\frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_2} - q\frac{\partial^2 y}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial p}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} - \frac{\partial q}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1}\right) = 0.$$

Differenziert man dagegen die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial t_2} - P\frac{\partial X}{\partial t_2} - Q\frac{\partial Y}{\partial t_2} - \varrho\left(\frac{\partial z}{\partial t_2} - p\frac{\partial x}{\partial t_2} - q\frac{\partial y}{\partial t_2}\right) = 0$$

nach t_1, so kommt

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t_2 \partial t_1} - \frac{\partial P}{\partial t_1}\frac{\partial X}{\partial t_2} - \frac{\partial Q}{\partial t_1}\frac{\partial Y}{\partial t_2} - P\frac{\partial^2 X}{\partial t_2 \partial t_1} - Q\frac{\partial^2 Y}{\partial t_2 \partial t_1}$$
$$- \frac{\partial \varrho}{\partial t_1}\left(\frac{\partial z}{\partial t_2} - p\frac{\partial x}{\partial t_2} - q\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)$$
$$- \varrho\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t_2 \partial t_1} - p\frac{\partial^2 x}{\partial t_2 \partial t_1} - q\frac{\partial^2 y}{\partial t_2 \partial t_1} - \frac{\partial p}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2} - \frac{\partial q}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}\right) = 0.$$

Wenn man diese beiden Gleichungen subtrahiert und überdies die beiden Gleichungen (4') berücksichtigt, so kommt

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial P}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial t_2} - \frac{\partial X}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial P}{\partial t_2}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t_1}\frac{\partial Y}{\partial t_2} - \frac{\partial Q}{\partial t_2}\frac{\partial Y}{\partial t_1}\right)$$
$$- \varrho\left(\left(\frac{\partial p}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2} - \frac{\partial p}{\partial t_2}\frac{\partial x}{\partial t_1}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial t_1}\frac{\partial y}{\partial t_2} - \frac{\partial q}{\partial t_2}\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)\right).$$

Hierin wollen wir nun der Reihe nach setzen

$$t_2 = p, \quad t_2 = q, \quad t_2 = x, \quad t_2 = y.$$

In den beiden zuletzt genannten Fällen ist noch zu berücksichtigen, daß wegen der Gleichungen (4), die die speziellen Formen

$$\frac{\partial z}{\partial x} - p = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - q = 0$$

annehmen, der partielle Differentialquotient einer Funktion von x, y, z, p, q nach x nicht einfach gleich

$$\frac{\partial F}{\partial x},$$

sondern gleich

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z},$$

d. h. gleich

$$\frac{dF}{dx}$$

und ebenso der partielle Differentialquotient nach y gleich

$$\frac{dF}{dy}$$

zu setzen ist.

Wenn wir dies alles berücksichtigen, so erhalten wir schließlich an Stelle der allgemeinen Gleichung (5) die vier folgenden speziellen Gleichungen

$$(6)\quad \begin{aligned}
\varrho\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} &= \frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial X}{\partial t_1} - \frac{\partial X}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial t_1} + \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t_1} - \frac{\partial Y}{\partial p}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t_1},\\
\varrho\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1} &= \frac{\partial P}{\partial q}\cdot\frac{\partial X}{\partial t_1} - \frac{\partial X}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial t_1} + \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t_1} - \frac{\partial Y}{\partial q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t_1},\\
-\varrho\frac{\partial p}{\partial t_1} &= \frac{dP}{dx}\cdot\frac{\partial X}{\partial t_1} - \frac{dX}{dx}\cdot\frac{\partial P}{\partial t_1} + \frac{dQ}{dx}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t_1} - \frac{dY}{dx}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t_1},\\
-\varrho\frac{\partial q}{\partial t_1} &= \frac{dP}{dy}\cdot\frac{\partial X}{\partial t_1} - \frac{dX}{dy}\cdot\frac{\partial P}{\partial t_1} + \frac{dQ}{dy}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t_1} - \frac{dY}{dy}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t_1}.
\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt zunächst von der Determinante Δ' dieser vier Gleichungen, welche die Größen $\frac{\partial x}{\partial t_1}$ u. s. w. durch die Größen $\frac{\partial X}{\partial t_1}$ u. s. w. ausdrückt, zeigen, daß sie nicht verschwindet. Dabei benützen wir folgende Beziehung:

Die Gleichungen (6) sind die Umkehrungen der Gleichungen

$$(7)\quad \begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial t_1} &= \frac{dX}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{dX}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial X}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t_1} + \frac{\partial X}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t_1},\\
\frac{\partial Y}{\partial t_1} &= \frac{dY}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{dY}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial Y}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t_1} + \frac{\partial Y}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t_1},\\
\frac{\partial P}{\partial t_1} &= \frac{dP}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{dP}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t_1} + \frac{\partial P}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t_1},\\
\frac{\partial Q}{\partial t_1} &= \frac{dQ}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{dQ}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t_1} + \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t_1}.
\end{aligned}$$

4. **Das hinreichende Kriterium.** Zwischen der Determinante Δ der Substitution (7) und der Determinante Δ' der ersten Substitution besteht nun eine doppelte Beziehung.

Erstens ist

$$\Delta \Delta' = 1,$$

weil die Substitutionen zu einander invers sind.

Zweitens aber erkennt man durch direkten Vergleich, daß

$$\Delta' = \frac{\Delta}{\varrho^4}$$

ist.

Hieraus folgt nun, daß

$$\Delta = \pm \varrho^2$$

ist, also *von Null verschieden*, da der Voraussetzung nach ϱ von Null verschieden ist.

Die Determinante

$$\frac{D(X, Y, Z, P, Q)}{D(x, y, z, p, q)}$$

hat nun aber (bis auf das Vorzeichen) den Wert:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial p} & \frac{\partial Z}{\partial q} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix}.$$

Wenn man die nur hierin erste Kolonne einmal mit p multipliziert und zur zweiten addiert, sodann mit q multipliziert und zur dritten addiert, so ändert sich der Wert der Determinante nicht, und es tritt jetzt an Stelle von

$$\frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} \text{ u. s. w.}$$

überall

$$\frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dZ}{dy} \text{ u. s. w.}$$

Wenn man sodann die vierte Zeile mit $-P$, die fünfte mit $-Q$ multipliziert und zur ersten addiert, so verschwinden alle Glieder der ersten Horizontalreihe mit Ausnahme des ersten (wegen der Gleichungen (3), und das erste nimmt den Wert an

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z} = \varrho.$$

Die vierreihige Unterdeterminante dieses Gliedes ist aber gleich Δ.

Also kommt schließlich

$$\frac{D(X, Y, Z, P, Q)}{D(x, y, z, p, q)} = \varrho \cdot \Delta = \pm \varrho^3.$$

Hieraus sieht man, *daß die in No. 2 aufgestellten notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind.*

Es braucht nicht noch besonders gefordert zu werden, daß die Funktionaldeterminante der Gleichungen nicht verschwindet; die Forderung, daß ϱ nicht verschwinden soll, genügt.

5. **Die Klammerrelationen.** Den Gleichungen (3) in No. 2 kann man noch eine andere Form geben, wenn man das Symbol

$$[F, \Phi] = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{d\Phi}{dx} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{\partial \Phi}{dq}$$

einführt.

Zufolge der Formeln (6) ist dann nämlich

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t_1} = [P, u] \frac{\partial X}{\partial t_1} + [Q, u] \frac{\partial Y}{\partial t_1} - [X, u] \frac{\partial P}{\partial t_1} - [Y, u] \frac{\partial Q}{\partial t_1}.$$

Setzt man nun in dieser Formel für u und t_1 irgend zwei der Größen X, Y, Z, P, Q, so gelangt man zu den folgenden Beziehungen, die wir einfach als die zwischen den Größen bestehenden *Klammerrelationen* bezeichnen wollen:

$$[X, Y] = 0, \; [P, Q] = 0,$$
$$[X, P] = -\varrho, \; [Y, Q] = -\varrho,$$
$$[P, Z] = \varrho \cdot \frac{\partial Z}{\partial X} = \varrho \cdot P,$$
$$[Q, Z] = \varrho \cdot Q,$$
$$[X, Z] = 0, \; [Y, Z] = 0.$$

6. **Beispiel.** Wir wollen zum Schluß ein Beispiel einer Berührungstransformation bringen und zeigen, daß alle die oben entwickelten Formeln gelten.

Es sei

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = -q,$$
$$z_1 = xp + yq - z,$$
$$p_1 = -x,$$
$$q_1 = -y,$$

dann ist

$$\frac{\partial z_1}{\partial t_1} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_1} - q_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} = \frac{\partial x}{\partial t_1} p + x \frac{\partial p}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial t_1} q + y \frac{\partial q}{d t_1} - \frac{\partial z}{\partial t_1}$$
$$- x \frac{\partial p}{\partial t_1} - y \frac{\partial q}{\partial t_1}$$
$$= - \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} - p \frac{\partial x}{\partial t_1} - q \frac{\partial y}{\partial t_1}\right).$$

Also ist $\varrho = -1$.

Die Determinante Δ hat den Wert

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

d. h. also, sie hat den Wert ϱ^2.

Die Determinante D hat den Wert

$$\frac{D(X, Y, Z, P, Q)}{D(x, y, z, p, q)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ p & q & -1 & x & y \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 = \varrho^3.$$

Die Klammerrelationen ergeben

$$[X, Y] = [P, Q] = 0,$$
$$[X, Z] = -1 \cdot (p - p) = 0,$$
$$[Y, Z] = -1 \cdot (q - q) = 0,$$
$$[X, P] = -1 \cdot -1 = (-\varrho),$$
$$[Y, Q] = -1 \cdot -1 = (-\varrho),$$
$$[P, Z] = 1 \cdot x = -P = \varrho \cdot P,$$
$$[Q, Z] = 1 \cdot y = -Q = \varrho \cdot Q. —$$

Alle diese Resultate stimmen mit den in Nummer 3 bis 5 dieses Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln überein.

7. **Transformation von Umhüllungsgebilden.** Aus der Definition und den geometrischen Eigenschaften einer Berührungstransformation folgt unmittelbar der Satz: *Bei einer Berührungstransformation verwandelt sich das Umhüllungsgebilde einer Schar von Elementvereinen in das Umhüllungsgebilde der transformierten Schar.*

In unserem Beispiel verwandelt sich z. B. der Punkt (P_2)

$$x = y = z = 0,$$

der das Umhüllungsgebilde aller durch den Koordinatenanfang gehenden Ebenen ist, in die Ebene

$$z_1 = 0, \quad (p_1 = q_1) = 0.$$

Jene Ebenen aber, die durch den Koordinatenanfang gehen, bei denen also

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0, \\ \beta q + \gamma &= 0, \\ \alpha p + \gamma &= 0, \end{aligned}$$

verwandeln sich in

$$\begin{aligned} \beta y_1 - \gamma &= 0, \\ \alpha x_1 - \gamma &= 0, \end{aligned}$$

$$-\alpha p_1 - \beta q_1 + \gamma \left(p_1 \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right) + q_1 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) - z_1 \right) = -\gamma z_1 = 0,$$

d. h. in die Punkte der $x_1 y_1$-Ebene, deren Umhüllungsgebilde in der That auch die $x_1 y_1$-Ebene ist (§ 28, 4).

§ 30. Die erweiterten Punkttransformationen.

1. **Die Erweiterung einer Punkttransformation.** Nachdem wir im vorigen Paragraphen die allgemeinen Eigenschaften der Formeln kennen gelernt haben, welche eine Berührungstransformation definieren, gehen wir nun zu der einfachsten Klasse von Berührungstransformationen über. Es sind das diejenigen, welche jeden Verein P_2 wieder in einen Verein P_2 überführen (vgl. § 15, 2).

Aus dieser Eigenschaft folgt, daß die Ausdrücke X, Y, Z nur von x, y, z abhängen dürfen. Es seien also die Gleichungen gegeben

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= X(x, y, z), \\ y_1 &= Y(x, y, z), \\ z_1 &= Z(x, y, z). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von P und Q dienen dann die Formeln

$$\frac{dZ}{dx} - P\frac{dX}{dx} - Q\frac{dY}{dx} = 0,$$

$$\frac{dZ}{dy} - P\frac{dX}{dy} - Q\frac{dY}{dy} = 0,$$

welche die folgenden Auflösungen ergeben

$$(2)\qquad P = \frac{\frac{dZ}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}},\qquad Q = \frac{\frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dX}{dx} - \frac{dZ}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}}.$$

Wir wollen die Bildung der Ausdrücke P und Q die *Erweiterung* der durch Formeln (1) definierten Punkttransformation nennen und die Formeln (1) und (2) zusammen als die *„erweiterte Punkttransformation* (1)" bezeichnen.

Wir müssen nun nach § 29, 4 noch untersuchen, ob die Größe

$$\varrho = \frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z}$$

von Null verschieden ist; denn dann erst definieren die Formeln (1) und (2) zusammen wirklich eine Berührungstransformation.

Es ist

$$\varrho = \frac{\frac{\partial Z}{\partial z}\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}\right) - \frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{dZ}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}\right) - \frac{\partial Y}{\partial z}\left(\frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dX}{dx} - \frac{dX}{dy}\cdot\frac{dZ}{dx}\right)}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}}.$$

Entwickelt man nun den Zähler, indem man für die Ausdrücke $\frac{dX}{dx}$ u. s. w. ihre wirklichen Werte einsetzt, so heben sich alle Ausdrücke fort, welche die Faktoren p oder q haben, und es bleibt gerade die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$$

übrig. Da aber der Voraussetzung nach diese Determinante nicht verschwindet (§ 3, 1), so ist auch ϱ von Null verschieden und wir haben den Satz:

Erweitert man eine beliebige Punkttransformation (1), *indem man die Formeln* (2) *hinzunimmt, so erhält man eine Berührungstransformation.*

2. **Beispiel.** Es sei eine Punkttransformation gegeben durch die Formeln:

$$(1')\qquad \begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ y_1 &= y\cos\varphi + x\sin\varphi,\\ z_1 &= z + a. \end{aligned}$$

Diese Formeln definieren eine Transformation, da die Funktionaldeterminante einen von Null verschiedenen Wert hat. Wir haben nämlich:

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Durch Erweiterung gelangen wir zu den Formeln:

(2′)
$$P = p \cdot \cos\varphi - q \cdot \sin\varphi,$$
$$Q = q \cdot \cos\varphi + p \cdot \sin\varphi.$$

(1′) und (2′) zusammen definieren nun eine Berührungstransformation, bei der jeder Elementverein bewegt wird, indem er um den Winkel φ gedreht wird, wobei die z-Axe die Axe der Rotation ist. Zugleich wird er um die Strecke a parallel zur z-Axe verschoben. —

§ 31. Die Punkt-Flächentransformationen.

1. **Die charakteristische Gleichung.** Bei einer Berührungstransformation geht jeder Elementverein wieder in einen Elementverein über und im speziellen daher (nach § 3, 4) jeder zweidimensionale Verein wieder in einen zweidimensionalen. Bei den erweiterten Punkttransformationen ging nun ein Verein P_2 wieder in einen Verein P_2 über. Da es aber außer den P_2 noch andere zweidimensionale Flächenelementvereine giebt, so werden wir zu anderen Berührungstransformationen gelangen, wenn wir einem Vereine P_2 z. B. die Elemente einer Fläche zuordnen.

Die Träger der Elemente dieses Vereines, welcher einem Punkt x, y, z zugeordnet wird, sind die Punkte einer Fläche, und wir wollen die Gleichung

(1)
$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

welche die dem Punkte x, y, z zugeordnete Fläche definiert, die *charakteristische Gleichung* nennen.

2. **Eine notwendige Eigenschaft der charakteristischen Gleichung.** Diese charakteristische Gleichung muß jedenfalls *eine ganz bestimmte Eigenschaft* haben, wenn es gelingen soll, auf Grund derselben eine Berührungstransformation zu definieren. Die Flächenelemente der durch die Gleichung (1) definierten Schar müssen den ganzen Raum ausfüllen, d. h. man muß, wenn ein beliebiges Element x_1, y_1, z_1, p_1, q_1

gegeben ist, eine Fläche der Schar angeben können, welche dieses Element enthält.

Könnte man nämlich eine solche Fläche nicht angeben, so wäre die erste Vorbedingung einer Transformation, daß jedem Element x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 auch ein Element x, y, z, p, q zugeordnet wird, nicht erfüllt. (Hieraus folgt, daß die Funktion Ω alle sechs Variabeln x, y, z, x_1, y_1, z_1 enthalten muß.)

Analytisch drückt sich diese Forderung so aus: Es müssen sich die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0 \end{aligned}$$

nach x, y, z auflösen lassen, d. h. *es darf die Funktionaldeterminante*

$$D = \frac{1}{\Omega_{z_1}^2} \begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ \Omega_{xx_1}\Omega_{z_1} - \Omega_{xz_1}\Omega_{x_1}, & \Omega_{yx_1}\Omega_{z_1} - \Omega_{yz_1}\Omega_{x_1}, & \Omega_{zx_1}\Omega_{z_1} - \Omega_{zz_1}\Omega_{x_1} \\ \Omega_{xy_1}\Omega_{z_1} - \Omega_{xz_1}\Omega_{y_1}, & \Omega_{yy_1}\Omega_{z_1} - \Omega_{yz_1}\Omega_{y_1}, & \Omega_{zy_1}\Omega_{z_1} - \Omega_{zz_1}\Omega_{y_1} \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden, wenn die Gleichung

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

erfüllt ist.

Man beachte, daß sich, wenn diese Bedingung erfüllt ist, auch die Gleichungen

$$(2')\qquad \begin{aligned} &\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

nach x_1, y_1 und z_1 auflösen lassen, da die der Determinante D entsprechende Determinante sich von D nur um den Faktor $\left(\frac{\Omega z_1}{\Omega z}\right)^2$ unterscheidet, der von Null verschieden ist, da Ω die beiden Größen z und z_1 enthält.

3. **Aufstellung der die Transformation definierenden Formeln mit Hilfe der charakteristischen Gleichung.** Wir können jetzt aus der charakteristischen Gleichung die Transformationsformeln berechnen und werden gleichzeitig auch beweisen, daß die in 2. entwickelte notwendige Forderung, welche die Funktion Ω erfüllen muß, auch hinreichend ist. —

Da jeder Elementverein wieder in einen Elementverein übergehen soll, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(3)\quad \frac{\partial z_1}{\partial t_i} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial t_i} - q_1\frac{\partial y_1}{\partial t_i} - \varrho\left(\frac{\partial z}{\partial t_i} - p\frac{\partial z}{\partial t_i} - q\frac{\partial y}{\partial t_i}\right) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Andererseits aber besteht die Gleichung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t_i}$$
$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen, da für t_1 und t_2 irgend zwei unabhängige Veränderliche gewählt werden dürfen, die weiteren Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = \frac{-\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{-\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}{q_1} = \frac{-\frac{\partial \Omega}{\partial z}}{\varrho} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\varrho p} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\varrho q}.$$

Umgekehrt, wenn diese Gleichungen bestehen, so bestehen auch die Gleichung (3). Können wir also aus diesen Gleichungen (zusammen mit $\Omega = 0$) die Variabeln x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 als Funktionen von x, y, z, p, q bestimmen (und umgekehrt), so definieren sie eine Berührungstransformation.

Eliminieren wir noch ϱ, so kommt:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0,\\ &\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0,\\ &\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0; \end{aligned}$$

und aus diesen Gleichungen zusammen mit $\Omega = 0$ sind dann x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 zu bestimmen.

Das ist aber möglich, da man ja der Voraussetzung nach aus

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,$$

x_1, y_1, z_1 bestimmen kann und dann aus den ersten beiden unter den vier Gleichungen (1) noch p_1 und q_1 erhält.

Genau so kann man zeigen, daß sich mit Hilfe der fünf Gleichungen auch x, y, z, p, q als Funktionen von x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 bestimmen lassen.

Also haben wir das einfache Resultat erhalten:

Die charakteristische Gleichung

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

bestimmt zusammen mit den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0,\\
\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0,\\
\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1\,\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} &= 0,\\
\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1\,\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} &= 0
\end{aligned}$$

eine Berührungstransformation, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial z_1}\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z\,\partial x_1}\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z\,\partial z_1}\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial y_1}\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial z_1}\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z\,\partial y_1}\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z\,\partial z_1}\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1}
\end{vmatrix}$$

nicht in Folge von

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

verschwindet.

4. **Die Legendre'sche Transformation.** Wir wollen das folgende Beispiel behandeln: Es sei gegeben die charakteristische Gleichung

$$\Omega = z + z_1 + x x_1 + y y_1 = 0.$$

Wir haben dann nach den soeben ausgeführten Entwickelungen die Gleichungen hinzuzufügen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= x_1 + p = 0,\\
\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= y_1 + q = 0,\\
\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1\,\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} &= x + p_1 = 0,\\
\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1\,\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} &= y + q_1 = 0.
\end{aligned}$$

Lösen wir die fünf Gleichungen auf, so kommt:

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = -q,$$
$$z_1 = xp + yq - z,$$
$$p_1 = -x,$$
$$q_1 = -y.$$

Daß diese fünf Gleichungen eine Berührungstransformation definieren, wissen wir aber schon. (Nach 3.) Sie wird die *Legendre'sche Transformation* genannt.

Wir wollen uns nun aber auch noch darüber Rechenschaft geben, wie dabei die verschiedenen Arten von Elementvereinen transformiert werden, und zwar zunächst die zweidimensionalen.

a) Ein Punkt (P_2), dessen Koordinaten etwa die Werte haben mögen:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

wird transformiert in eine Ebene:

$$z_1 = -x_1 x_0 - y_1 y_0 - z_0,$$
$$p_1 = -x_0, \qquad q_1 = -y_0.$$

Umgekehrt wird eine *Ebene*

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$
$$p = \alpha, \quad q = \beta,$$

transformiert in einen *Punkt* (P_2)

$$z_1 = -\gamma, \quad x_1 = -\alpha, \quad y_1 = -\beta.$$

b) Eine *Gerade* mit allen ihren Flächenelementen, welche gegeben ist durch die Gleichungen

$$y = a_1 x + b_1,$$
$$z = a_2 x + b_2,$$
$$a_2 - p - q a_1 = 0$$

geht über in einen durch die Gleichungen

$$q_1 = a_1 p_1 - b_1,$$
$$z_1 = \frac{b_1}{a_1} x_1 + \frac{b_1 a_2}{a_1} - b_2,$$
$$a_2 + x_1 + y_1 a_1 = 0$$

gegebenen Verein, d. h. wieder in einen Verein C_2, der von allen

Elementen gebildet wird, deren Träger auf der Geraden liegen, deren Gleichungen lauten:

$$y_1 = -\frac{x_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1},$$

$$z_1 = \frac{b_1 x_1}{a_1} + \frac{b_1 a_2}{a_1} - b_2.$$

c) Bisher untersuchten wir spezielle Arten von zweidimensionalen Elementvereinen. Wir wollen nun sehen, in was für ein Gebilde sich ein Verein C_2 verwandelt, dessen Trägerkurve nicht eine gerade Linie ist.

Der Verein C_2 sei gegeben durch die Gleichungen

$$y = \varphi(x),$$
$$z = \psi(x),$$
$$\psi'(x) - p - q\,\varphi'(x) = 0.$$

Dann lauten die Gleichungen des transformierten Gebildes

$$z_1 = -x x_1 - y_1\,\varphi(x) - \psi(x),$$
$$p_1 = -x,$$
$$q_1 = -\varphi(x), \quad \psi'(x) + x_1 + y_1\,\varphi'(x) = 0.$$

Sie stellen also eine abwickelbare Fläche dar, nämlich die von den Ebenen

$$z_1 = t x_1 - y_1\,\varphi(-t) - \psi(-t)$$

umhüllte Fläche. (Man hätte dies auch direkt daraus ersehen können, daß ein P_2 sich in eine Ebene verwandelt, und daher ein Umhüllungsgebilde von P_2, nämlich ein Verein C_2, in ein Umhüllungsgebilde von Ebenen [§ 29, 6], also in eine abwickelbare Fläche.)

Umgekehrt verwandelt sich eine abwickelbare Fläche, gegeben durch die Gleichungen:

$$z = t x + y\,\varphi(t) + \psi(t),$$
$$0 = x + y\,\varphi'(t) + \psi'(t),$$
$$p = t, \quad q = \varphi(t),$$

in einen Verein C_2:

$$y_1 = -\varphi(-x_1),$$
$$z_1 = \psi(-x_1),$$
$$p_1 - q_1\,\varphi'(-x_1) + \psi'(-x_1) = 0,$$

deren Träger die durch die ersten beiden Gleichungen definierte Kurve bilden.

Alle anderen Flächen werden wieder in Flächen verwandelt (und zwar nicht in abwickelbare Flächen). —

d) Von eindimensionalen Elementvereinen wollen wir die Vereine L_1 besonders betrachten.

Ein L_1 ist gegeben durch

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$
$$q = \alpha p + \beta,$$

das transformierte Gebilde durch:

$$\begin{aligned} p_1 &= -x_0, \\ q_1 &= -y_0, \\ y_1 &= \alpha x_1 - \beta, \\ z_1 &= -x_1(x_0 + y_0\alpha) + \beta y_0 - z_0, \end{aligned}$$

es stellt also eine C_1 dar, und zwar einen Streifen, dessen Trägerkurve eine gerade Linie ist, und dessen Elemente alle einander parallel sind.

Umgekehrt verwandelt sich ein solcher Streifen in einen Verein L_1. —

e) Endlich wollen wir diejenigen (ein- oder zweidimensionalen) Elementvereine einer besonderen Betrachtung unterziehen, deren Träger auf dem Paraboloid

$$2z + x^2 + y^2 = 0$$

gelegen sind.

Die *Punkte*

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = -\frac{x_0^2 + y_0^2}{2}$$

gehen über in die Elementvereine:

$$p_1 = -x_0, \quad q_1 = -y_0,$$
$$z_1 = -x_0 x_1 - y_0 y_1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2},$$

d. h. in die *Tangentialebenen.* (Einem Punkte entspricht die in diesem Punkte an das Paraboloid gelegte Tangentialebene.)

Die Tangentialebenen ihrerseits gehen in die Berührungspunkte über.

Weiter folgt, daß eine Kurve (C_2), die auf dem Paraboloid gelegen ist, übergeht in eine abwickelbare Fläche, welche das Paraboloid längs der Kurve C_2 berührt.

Ein *Linienelement,* welches auf dem Paraboloid gelegen ist (d. h. dessen Punkt dem Paraboloid angehört, und dessen Richtung der

Tangentialebene des Paraboloides in diesem Punkte angehört), ist gegeben durch:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = -\frac{x_0^2 + y_0^2}{2},$$

$$\alpha(p + x_0) + \beta(q + y_0) = 0.$$

Diese Gleichungen gehen über in:

$$p_1 = -x_0,$$

$$q_1 = -y_0,$$

$$\alpha(x_1 - x_0) + \beta(y_1 - y_0) = 0,$$

$$z_1 = -x_0 x_1 - y_0 y_1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2}.$$

D. h. wir bekommen eine Gerade (vgl. d), die, wie die letzte Gleichung lehrt, das Paraboloid im Punkte $x_0 y_0$ berührt, und der Streifen, welcher dieser Geraden zugeordnet wird, besteht aus lauter Elementen, die der Tangentialebene angehören. (Es ist ja $p_1 = -x_0$, $q_1 = -y_0$.) —

Alle diese hier erörterten Eigenschaften der LEGENDRE'schen Transformation werden wir später verwerten.

5. **Die Dilatation.** Jedem Punkte wird eine Kugel mit dem Radius 1 zugeordnet. Das geschieht durch die Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - 1 = 0.$$

Zu dieser Gleichung treten noch hinzu die Gleichungen:

$$(x - x_1) + p(z - z_1) = 0,$$

$$(y - y_1) + q(z - z_1) = 0,$$

$$-(x - x_1) - p_1(z - z_1) = 0,$$

$$-(y - y_1) - q_1(z - z_1) = 0.$$

Löst man die Gleichungen auf, so kommt

$$x_1 = x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$y_1 = y + \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$z_1 = z - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$p_1 = p,$$

$$q_1 = q.$$

Diese Transformation besteht also darin, daß jedes Element parallel mit sich selbst fortbewegt wird (das zeigen die beiden letzten Gleichungen) und zwar in der Richtung seiner Normale, denn es ist

$$\frac{(x_1 - x)p + (y_1 - y)q - (z_1 - z)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}} = 1 .$$

Die Länge der Strecke, um welche verschoben wird, ist

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = 1 .$$

Jedes Flächenelement wird also in seiner eigenen Normalrichtung um die Strecke 1 *verschoben.* — Hieraus kann man alle weiteren Eigenschaften der Transformation ableiten, die eben wegen der soeben erkannten Eigenschaft den Namen „Dilatation" erhalten hat (vgl. § 15, 7).

§ 32. Die Punktkurventransformation.

1. *Definition der Punktkurventransformation.* Neben den P_2 und den Vereinen, die aus der Gesamtheit der Elemente einer Fläche gebildet sind, haben wir in § 27, 3b noch eine dritte Klasse von zweidimensionalen Flächenelementvereinen kennen gelernt, die Vereine C_2. Entsprechend giebt es nun außer den erweiterten Punkttransformationen und den Punktflächentransformationen noch eine dritte Klasse von Berührungstransformationen, wo den Vereinen P_2 des Raumes Vereine C_2 zugeordnet werden. Wir wollen diese Transformationen deshalb mit dem Namen „Punktkurventransformationen" bezeichnen.

Um eine solche Transformation zu definieren, sind zunächst zwei Gleichungen notwendig, welche die dem Punkte x, y, z zugeordnete Trägerkurve darstellen.

$$\begin{aligned} &\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ &\Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

Um die weiteren Formeln zu berechnen, benutzen wir die Forderung, daß jeder Elementverein wieder in einen Elementverein übergehen soll:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t_i} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_i} - q_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_i} = \varrho \left(\frac{\partial z}{\partial t_i} - p \frac{\partial x}{\partial t_i} - q \frac{\partial y}{\partial t_i} \right), \quad i = 1, 2 . \tag{2}$$

Aus (1) folgt überdies

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial t_i} \\ + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t_i} = 0 \end{aligned} \tag{1'}$$

und

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_i} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t_i} = 0.$$

Damit nun die Gleichung (2) infolge der Gleichungen (1), oder was dasselbe ist, infolge der Gleichungen (1') besteht, müssen die folgenden Relationen erfüllt sein: **Man muß zwei Größen λ_1 und λ_2 bestimmen können, welche die sechs folgenden Gleichungen erfüllen:**

$$(1'') \quad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - p_1 = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} - q_1 = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} + 1 = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x} - p \cdot \varrho = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y} - q \cdot \varrho = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z} + \varrho = 0. \end{cases}$$

[Aus diesen Gleichungen folgt umgekehrt wieder die Gleichung (2).]

Wenn wir die Gleichungen (1'') nach p, q, p_1 und q_1 auflösen, so kommt endlich:

$$(3) \quad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}}, \\ q_1 = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}}, \\ p = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z}}, \\ q = -\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z}}. \end{cases}$$

Kann man nun aus den Gleichungen (1) und (3) zusammen — nach vorheriger Elimination von λ_1 und λ_2 — die Variabeln x_1, y_1, z_1, p_1, q_1

als Funktionen der x, y, z, p, q bestimmen, und umgekehrt die Variabeln x, y, z, p, q als Funktionen der x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, so bestimmen die Gleichungen eine Berührungstransformation. —

Wir wollen hier nicht die allgemeinen Bedingungen erörtern, welche diese Forderung den beiden Funktionen Ω_1 und Ω_2 auferlegt, sondern uns begnügen, zwei Beispiele anzugeben. Dies genügt um so eher, als wir später nur von erweiterten Punkttransformationen und von Punktflächentransformationen Gebrauch machen werden.

2. **Die Ampère'sche Transformation.** Es sei

(1)
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= z + z_1 + x x_1 = 0, \\ \Omega_2 &= y - y_1 = 0. \end{aligned}$$

Dann treten hinzu die Gleichungen:

(3)
$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 \cdot 0}{\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0}, \\ q_1 &= -\frac{\lambda \cdot 0 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0}, \\ p &= -\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \cdot 0}{\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0}, \\ q &= -\frac{\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) zusammen folgt:

(4)
$$\begin{aligned} x_1 &= -p, \\ y_1 &= y, \\ z_1 &= xp - z, \\ p_1 &= -x, \\ q_1 &= -q. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen in der That eine Berührungstransformation, denn es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t_i} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_i} - q_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_i} &= \frac{\partial x}{\partial t_i} p + \frac{\partial p}{\partial t_i} x - \frac{\partial z}{\partial t_i} - x \frac{\partial p}{\partial t_i} + q \frac{\partial y}{\partial t_i} \\ &= (-1)\left(\frac{\partial z}{\partial t_i} - p \frac{\partial x}{\partial t_i} - q \frac{\partial y}{\partial t_i}\right). \end{aligned}$$

3. **Die Lie'sche Geradenkugeltransformation.** Es sei

(1)
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= x_1 + i y_1 + z + x z_1 = 0, \\ \Omega_2 &= x(x_1 - i y_1) + y - z_1 = 0. \end{aligned}$$

Hierzu treten die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} p_1 &= -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 x}{\lambda_1 x - \lambda_2}, \\ q_1 &= -\frac{\lambda_1 i - \lambda_2 i x}{\lambda_1 x - \lambda_2}, \\ p &= -\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_1 - i y_1)}{\lambda_1}, \\ q &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Löst man auf, so kommt:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{y+p}{q-x} - z - x \cdot \frac{px+qy}{q-x}\right), \\ y_1 &= \frac{i}{2}\left(\frac{y+p}{q-x} + z + x \cdot \frac{px+qy}{q-x}\right), \\ z_1 &= \frac{px+qy}{q-x}, \\ p_1 &= \frac{qx-1}{q+x}, \\ q_1 &= -i\frac{1+qx}{q+x}, \end{aligned}$$

und es ist

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_i} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_i} - q_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_i} = \frac{qx}{q+x}\left(\frac{\partial z}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} - q\frac{\partial y}{\partial t_i}\right).$$

Die Transformation ist also eine Berührungstransformation. —

Diese Transformation hat eine interessante Eigenschaft: Die *Gerade* (C_2)

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + b_1, \\ z &= a_2 x + b_2 \end{aligned}$$

geht über in einen Elementverein, dessen Trägergebilde definiert ist durch

$$\begin{aligned} x_1 + i y_1 + a_2 x + b_2 + x z_1 &= 0, \\ x(x_1 - i y_1) + a_1 x + b_1 - z_1 &= 0, \end{aligned}$$

also in eine *Kugel.*

Eliminiert man nämlich hieraus x, so kommt:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1(a_1 + b_2) + i y_1 (a_1 - b_2) + z_1(a_2 - b_1) \\ + a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Transformation verwandelt also die Geraden des Raumes x, y, z in die Kugeln des Raumes x_1, y_1, z_1.

§ 33. Das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und die Normalform einer Gleichung.

1. Die erweiterte Fassung des Integrationsproblems. Die Aufgabe, eine gegebene partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

zu integrieren, wurde früher (§ 4, 4) so gefaßt: Es sollen alle möglichen Funktionen

$$z = \varphi(x, y)$$

bestimmt werden, welche die Differentialgleichung erfüllen.

Mit Benutzung des Begriffes „Flächenelementverein" und der in § 27 gegebenen Auseinandersetzungen kann man dasselbe Problem auch so definieren:

Es sollen alle möglichen Elementvereine F_2 bestimmt werden, deren Elemente in der durch die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

dargestellten Schar enthalten sind.

Dieses frühere Problem ist also einbegriffen in dem folgenden, erweiterten Integrationsproblem:

Man soll alle zweidimensionalen Elementvereine bestimmen, deren Elemente in der durch die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

dargestellten Schar enthalten sind.

Diese Elementvereine wollen wir „*Integralgebilde* (J_2) *der gegebenen Gleichung*" nennen.

Neben den zweidimensionalen giebt es auch eindimensionale Integralgebilde (J_1); z. B. jeder Streifen, welcher einer Integralfläche angehört, ist ein solches Gebilde J_1.

Bei dieser neuen, allgemeineren Fassung des Integrationsproblems beschränken wir uns also nicht auf den Fall, wo die Träger eine Fläche bilden, sie können auch eine Kurve bilden (das Integralgebilde ist dann ein Verein C_2), oder es kann das Gebilde einen einzigen Trägerpunkt haben (dann ist es ein P_2).

Diese erweiterte Fassung des Problems hat einen großen Vorzug, denn nun gilt der Satz:

Führen wir eine Berührungstransformation aus, durch die eine gegebene Differentialgleichung in eine neue übergeht, so verwandelt sich dabei jedes Integralgebilde wieder in ein Integralgebilde (der neuen Gleichung).

Dieser Satz ist evident, denn erstens wird jeder Flächenelementverein wieder in einen Verein (derselben Dimension, § 3, 4) übergeführt, und zweitens verwandelt sich jedes der durch die erste Gleichung gegebenen Schar angehörige Flächenelement in ein Flächenelement, das der durch die transformierte Gleichung gegebenen Schar angehört. —

Als *Differentialgleichung im erweiterten Sinn* bezeichnen wir nun jede Gleichung zwischen den fünf Koordinaten des Flächenelements; denn jede solche Gleichung stellt eine viergliedrige Schar von Flächenelementen dar, und jede solche Gleichung giebt Anlaß, sich die Aufgabe zu stellen, alle Elementvereine zu bestimmen, welche dieser viergliedrigen Schar angehören.

Aus der Definition des Integrationsproblems folgt unmittelbar: *Hat eine eingliedrige Schar von Integralgebilden* (J_2) *eine Enveloppe, so ist diese Enveloppe ebenfalls ein Integralgebilde.*

2. **Transformation einer Gleichung in die Normalform.** Der Umstand, daß bei Berührungstransformationen, kurz gesagt, das Integrationsproblem invariant bleibt, legt den folgenden Gedanken nahe: *Ist es vielleicht möglich, zu beweisen, daß jede Differentialgleichung sich auf eine Normalform bringen läßt, welche sich leicht integrieren läßt, und kann man die durch Integration dieser Normalform gewonnenen Resultate dann umgekehrt auf die allgemeine Form übertragen?*

Wir wollen zeigen, *daß eine solche Transformation möglich ist unter Voraussetzung der früher* (§ 26, 3) *bewiesenen Existenz der vollständigen Lösung.*

Existiert nämlich eine vollständige Lösung

$$z = \omega(x, y, a, b),$$

so definiert die Gleichung

$$z_1 - z + \omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

zusammen mit

$$p_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0,$$

$$q_1 + \frac{\partial \omega}{\partial y_1} = 0,$$

$$p - \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

$$q - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

eine Berührungstransformation, weil die Determinante D (§ 31, 2) den Wert hat:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & -1 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y_1} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial y_1} & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y_1} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial y_1} \end{vmatrix},$$

der der Voraussetzung nach (§ 26, 3) von Null verschieden ist.

Man kann also eine Berührungstransformation angeben, welche die Gesamtheit der unter der vollständigen Lösung enthaltenen Integralflächen überführt in (zweidimensionale) Integralgebilde der Gleichung

$$z_1 = 0.$$

Wenn nämlich

$$z = \omega(x, y, x_1, y_1)$$

ist, d. h. wenn die Fläche eine (zur vollständigen Lösung gehörige) Integralfläche ist, so ist auch

$$z_1 = 0,$$

d. h. die Träger des transformierten Gebildes liegen in der xy-Ebene.

Wir behaupten aber weiter: Durch die angegebene Transformation verwandelt sich jedes Integralgebilde der gegebenen Gleichung

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

in ein Integralgebilde der Gleichung

$$z_1 = 0.$$

Es folgt dies daraus, daß nach Nr. 1 jedes Integralgebilde als Umhüllungsgebilde einer zweigliedrigen Schar (z. B. *der durch die vollständige Lösung dargestellten Schar*) aufgefaßt werden kann.

Bei der genannten Transformation geht also jedes Integralgebilde wieder in ein Integralgebilde über.

Wir bemerken endlich noch, daß, wenn man die expliciten Gleichungen der Transformation aufstellt, für z_1 sich der folgende Wert ergeben muß

$$z_1 = \varphi(x, y, z, p, q) \cdot F(x, y, z, p, q),$$

weil jedes Integralgebilde der transformierten Gleichung die Bedingung

$$z_1 = 0,$$

und jedes Integralgebilde der gegebenen Gleichung die Bedingung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

erfüllt.

§ 34. Integration der Normalgleichung $z_1 = 0$.

1. **Zweidimensionale Integralgebilde** (J_2). Da wir früher alle Arten von Flächenelementvereinen aufgezählt haben, können wir jetzt die Gleichung $z_1 = 0$ leicht integrieren. Wir gelangen zu folgenden Arten von zweidimensionalen Integralgebilden:

erstens: Die Ebene $z_1 = 0$ selbst ($z_1 = 0,\ p_1 = 0,\ q_1 = 0$),

zweitens: Alle Punkte (P_2) der $x_1 y_1$-Ebene,

$$(x_1 = a_1,\quad y_1 = b_1,\quad z_1 = 0),$$

ferner alle C_2, deren Trägerkurven in der $x_1 y_1$-Ebene gelegen sind

$$y_1 = \varphi(x_1),\quad z_1 = 0,\quad p_1 + q_1 \varphi'(x_1) = 0.$$

Man beachte, daß das Umhüllungsgebilde von ∞^1 zweidimensionalen Integralgebilden immer wieder ein Integralgebilde ist, denn wenn wir ∞^1 Kurven nehmen, die eine einhüllende Kurve haben, so ist ja der C_2-Verein, dessen Trägerkurve diese Einhüllende ist, selbst das Umhüllungsgebilde der erzeugenden Elementvereine C_2 (§ 28, 4).

Ebenso: Wenn man ∞^1 Punkte nimmt, so bilden sie in ihrer Gesamtheit eine Kurve, und der Verein C_2, der zu dieser Kurve gehört, ist das Umhüllungsgebilde der Vereine P_2, deren Träger die einzelnen Punkte der Kurve sind.

Eine *Ausnahmestellung* nimmt nur die Ebene $z_1 = 0$ selbst ein, insofern als sie das Umhüllungsgebilde einer zweigliedrigen Schar von Integralgebilden ist, und umgekehrt eine zweigliedrige Schar von Integralgebilden gerade die Ebene als Umhüllungsgebilde besitzt.

Z. B.: Alle Punkte (P_2) der Ebene haben als gemeinsames Umhüllungsgebilde die Ebene $z_1 = 0$.

Ebenso: Alle Geraden der Ebene (aufgefaßt als C_2) haben die Ebene als gemeinsames Umhüllungsgebilde.

Dagegen befinden sich unter den Elementen, welche das Um-

hüllungsgebilde einer eingliedrigen Schar von Punkten oder Kurven enthält, nur eine eingliedrige Schar, deren Elemente die Gleichungen

$$z_1 = 0, \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 0$$

erfüllen.

(Z. B. haben alle Punkte der y-Axe als Umhüllungsgebilde den durch die Gleichungen

$$x_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad q_1 = 0$$

dargestellten Verein, von dem aber nur *die* Elemente, welche überdies noch die Gleichung

$$p_1 = 0$$

erfüllen, zu den Elementen der $x_1 y_1$-Ebene gehören.) —

Wir wollen wegen dieser Ausnahmestellung die $x_1 y_1$-Ebene die *singuläre Lösung* nennen, ihre Elemente *singuläre* Elemente.

2. **Eindimensionale Integralgebilde** (J_1). Auch die Bestimmung der eindimensionalen Integralgebilde hat keine Schwierigkeit. Wir haben folgende verschiedenen Klassen:

a) alle Elementstreifen, deren Trägerkurven in der $x_1 y_1$-Ebene gelegen sind;

b) alle Elementarkegel, deren Trägerpunkte in der $x_1 y_1$-Ebene liegen;

c) alle Linienelemente (L_1), deren Trägerpunkte in der $x_1 y_1$-Ebene liegen.

Eine besondere Ausnahmestellung unter den L_1 nehmen diejenigen Vereine ein, deren Axen in der $x_1 y_1$-Ebene gelegen sind. Wir wollen dieselben deshalb gesondert untersuchen.

3. **Die charakteristischen** L_1. Die Vereine L_1, deren Axen in der $x_1 y_1$-Ebene gelegen sind, sind definiert durch Gleichungssysteme von folgender Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= a, \\ y_1 &= b, \qquad \alpha p_1 + \beta q_1 = 0. \\ z_1 &= 0, \end{aligned}$$

Wir können eine Reihe Eigenschaften derselben angeben, durch welche sie sich von allen anderen eindimensionalen Integralgebilden unterscheiden.

Erstens gilt der Satz: *Haben zwei Integralgebilde* J_2 (so wollen wir die zweidimensionalen Integralgebilde bezeichnen) *ein gemeinsames Flächenelement, welches nicht der singulären Lösung angehört, so haben sie alle Elemente eines Vereins* L_1 *gemeinsam, zu dem jenes Flächenelement gehört.*

Z. B. haben ein Integral-P_2 und ein Integral-C_2 alle Elemente des Vereins L_1 gemeinsam, dessen Axe die im Träger von P_2 an die Kurve C_2 gezogene Tangente ist. (Der Punkt P_2 muß dabei natürlich auf der Kurve C_2 liegen.)

Beispiel:

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

und

$$x_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad q_1 = 0$$

haben gemeinsam den folgenden L_1:

$$x_1 = y_1 = z_1 = q_1 = 0.$$

Ferner wollen wir die Trägerkurven zweier Integral-C_2 betrachten. Damit diese Kurven ein gemeinsames, der singulären Lösung nicht angehöriges Flächenelement haben, müssen sie sich notwendigerweise berühren in dem gemeinsamen Punkte. (Würden sie sich nämlich nur schneiden, so würde das gemeinsame Flächenelement in dem Schnittpunkte der Ebene $z_1 = 0$ angehören, also singulär sein.) Wenn sie sich aber berühren, so haben sie alle Elemente des Vereins L_1 gemeinsam, dessen Träger der Punkt ist, in dem sich die Kurven berühren und dessen Axe die gemeinsame Tangente ist.

4. **Die Integralgebilde J_2 als Umhüllungsgebilde der charakteristischen L_1.** Die charakteristischen L_1 haben aber noch eine weitere Eigenschaft, welche sie auszeichnet.

Nehmen wir eine beliebige Kurve der $x_1 y_1$-Ebene und ordnen wir jedem Punkte derselben ein nicht singuläres Flächenelement zu, welches zu der gegebenen Schar gehört und welches andererseits die Kurve berührt, so entsteht ein Integral-C_1. Jedes dieser Elemente aber gehört einem ganz bestimmten Vereine L_1 an, und alle diese Vereine L_1 zusammen erzeugen einen Integral-C_2.

Der Integral-C_2 also kann mit Hilfe der L_1 dargestellt werden, wenn man von der Trägerkurve ausgeht: *Man nehme eine beliebige Kurve* (deren Punkte natürlich Träger von Elementen der gegebenen Schar sein müssen), *ordne sodann jedem Punkte irgend ein der Schar angehöriges Element zu, das nicht der singulären Lösung angehört. Jedes dieser Elemente bestimmt einen charakteristischen Verein L_1, und die Gesamtheit dieser Vereine L_1 ist ein J_2.*

Auch diese Eigenschaft kommt nur den charakteristischen L_1 zu. Alle anderen J_1 (eindimensionalen Integralgebilde), welche nicht aus lauter singulären Flächenelementen bestehen, haben als Umhüllungsgebilde entweder eine endliche Anzahl bez. eine nicht kontinuierliche Schar von Flächenelementen, oder aber eine endliche

Anzahl von Integralgebilden, deren Dimension nicht größer als *eins* ist.

Z. B. umhüllen die Integralkegel:

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0, \qquad p_1^2 + q_1^2 = 1$$

die beiden Integral-C_1:

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0, \qquad q_1 = +1, \quad p_1 = 0$$

und

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0, \qquad q_1 = -1, \quad p_1 = 0.$$

§ 35. Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. **Reduktion auf die Bestimmung der charakteristischen J_1.** Will man eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

integrieren, so lassen sich die durch Betrachtung der Normalgleichung

$$z_1 = 0$$

gewonnenen Resultate und Methoden übertragen; denn alle im vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze betreffen solche Eigenschaften, welche bei Berührungstransformationen ungeändert bleiben.

Z. B. muß der folgende Satz gelten: *Unter allen eindimensionalen Integralgebilden muß es entsprechend der dreigliedrigen Schar von charakteristischen L_1 eine ebenfalls dreigliedrige Schar von charakteristischen J_1 geben.*

Diese J_1 haben folgende Eigenschaften:

Erstens: *Jedes Flächenelement der Schar gehört einem charakteristischen J_1 an* (so wie jedes Element der Schar $z_1 = 0$ einem charakteristischen L_1 angehörte).

Zweitens: *Haben zwei J_2 ein Flächenelement gemein, so haben sie alle Elemente eines charakteristischen J_1 gemein* (wenn dieses Element nicht gerade ein singuläres ist).

Drittens: *Man erhält ein J_2, wenn man den Punkten einer Kurve Flächenelemente zuordnet, welche in ihrer Gesamtheit einen J_1 bestimmen: jedes der Flächenelemente dieses J_1 gehört nämlich einem charakteristischen J_1 an und die Gesamtheit dieser charakteristischen J_1 definieren ein J_2.*

Kennen wir also die charakteristischen J_1, so können wir das zweidimensionale Integralgebilde bestimmen, welches eine gegebene Kurve enthält.

Durch diese Betrachtung wird also das Integrationsproblem auf die Bestimmung der charakteristischen J_1 reduziert.

Wir wollen noch bemerken, daß diese charakteristischen J_1 immer C_1 oder *Elementstreifen* sind, wenn die gegebene Gleichung eine Differentialgleichung im eigentlichen Sinne ist, d. h. mindestens eine der beiden Größen p, q wirklich enthält.

Denn die Gesamtheit der charakteristischen J_1 enthält ja alle Flächenelemente der gegebenen Schar, und es erzeugen ∞^1 charakteristische J_1, welche sämtlich je ein Element eines J_1 enthalten, einen zweidimensionalen Elementverein, d. h. im allgemeinen eine Fläche. Eine solche Eigenschaft kommt aber, wenn x, y, z in einem gewissen Bereich beliebig variieren können, nur solchen Vereinen zu, die C_1, d. h. Elementstreifen sind.

Es können die charakteristischen J_1 nicht Elementarkegel sein, denn ∞^1 Elementarkegel, deren Träger eine Kurve bilden, können nur ein Gebilde mit eindimensionalem Träger umhüllen.

Nur in dem Falle, wo die Gleichung von p und q frei ist, reduzieren sich die charakteristischen J_1 auf Vereine L_1. —

Dem entsprechend wollen wir bei einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die charakteristischen J_1 als charakteristische Elementstreifen oder einfach als *charakteristische Streifen* bezeichnen.

2. **Das System von Gleichungen zur Bestimmung der charakteristischen Streifen.** Wir haben früher bei der Reduktion auf die Normalform die Kenntnis einer vollständigen Lösung vorausgesetzt. — Um nun jetzt die Differentialgleichungen für die charakteristischen Streifen aufzustellen, *bedürfen wir dieser Kenntnis garnicht.* Der Umstand, daß (§ 33, 2) eine Gleichung dieser Transformation die Gestalt

$$z_1 = \varphi(x, y, z, p, q) F(x, y, z, p, q) \left(= Z(x, y, z, p, q)\right)$$

hat, genügt bereits.

Es sei nämlich

$$(1) \qquad \begin{aligned} z_1 &= Z(x, y, z, p, q), \\ x_1 &= X(x, y, z, p, q), \\ y_1 &= Y(x, y, z, p, q), \\ p_1 &= P(x, y, z, p, q), \\ q_1 &= Q(z, y, z, p, q) \end{aligned}$$

eine Transformation, welche die Reduktion auf die Normalform leistet.

Dann erfüllen die Gleichungen, welche die charakteristischen Streifen darstellen,

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t),$$
$$p = p(t),$$
$$q = q(t),$$

die Gleichungen (§ 29, 7)

$$(2)\quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dX}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dX}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial X}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dt} + \frac{\partial X}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt} = 0, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dY}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dY}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt} = 0, \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{dZ}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt} = 0, \end{aligned}$$

$$p_1\frac{dq_1}{dt} - q_1\frac{dp_1}{dt} = \left(P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx}\right)\frac{dx}{dt} + \left(P\frac{dQ}{dy} - Q\frac{dP}{dy}\right)\frac{dy}{dt}$$
$$+ \left(P\frac{\partial Q}{\partial p} - Q\frac{\partial P}{\partial p}\right)\frac{dp}{dt} + \left(P\frac{dQ}{\partial q} - Q\frac{\partial P}{\partial q}\right)\frac{dq}{dt} = 0.$$

Denn die Gleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt} = p_1\frac{dq_1}{dt} - q_1\frac{dp_1}{dt} = 0$$

stellen ja die charakteristischen L_1 dar

$$(z_1 = 0,\ x_1 = 0,\ y_1 = b,\quad \alpha p_1 + \beta q_1 = 0);$$

es müssen also die weiteren (rechtsstehenden) Gleichungen die charakteristischen Streifen der Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

darstellen.

Diese Gleichungen sind nun erfüllt, wenn man

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q},\quad \frac{dz}{dt} = p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}, \\ &\frac{dp}{dt} = -\frac{dF}{dx},\quad \frac{dq}{dt} = -\frac{dF}{dy} \end{aligned}$$

setzt, oder, was dasselbe ist,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\partial Z}{\partial p} \text{ u. s. w.}$$

(Es ist

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial(\varphi F)}{\partial p} = \varphi\cdot\frac{\partial F}{\partial p} + F\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \varphi\frac{\partial F}{\partial p},$$

weil $F = 0$ ist.)

Setzt man nämlich diese Werte ein, so verwandeln sich die Gleichungen (2) in

$$\varphi \frac{dx_1}{dt} = [Z, X], \quad \varphi \frac{dy_1}{dt} = [Z, Y],$$

$$\varphi \frac{dz_1}{dt} = [Z, Z], \quad \varphi \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dp_1}{dt}\right) = P[Z, Q] - Q[Z, P].$$

Alle diese Ausdrücke verschwinden aber, weil die Gleichungen (1) eine Berührungstransformation darstellen.

In der That, nach (§ 29, 5) ist

$$[Z, X] = 0, \quad [Z, Y] = 0,$$

$$P[Z, Q] - Q[P, Z] = P(-\varrho \cdot Q) - Q(-\varrho \cdot P) = 0,$$

während die Bedingung

$$[Z, Z] = 0$$

von jeder Funktion erfüllt wird.

Hieraus folgt, daß die Gleichungen (3) wirklich die charakteristischen Streifen bestimmen.

Im ganzen sind wir also zu dem folgenden einfachen Ergebnis gelangt:

Um eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zu integrieren, d. h. um die eine gegebene Kurve enthaltende Integralfläche zu bestimmen, genügt die Kenntnis der charakteristischen Streifen. Dieselben sind bestimmt durch das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{dt} = p \frac{\partial F}{dp} + q \frac{\partial F}{\partial q},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{dx}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y},$$

zusammen mit der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.

3. **Die linearen partiellen Differentialgleichungen.** Die Charakteristikentheorie kann man speziell anwenden auf die Differentialgleichungen

$$p\, X(x, y, z) + q\, Y(x, y, z) - Z(x, y, z) = 0$$

und bekommt dann für die Trägerkurven der charakteristischen Streifen die einfachen Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y, z)}{X(x, y, z)},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p\,X(x, y, z) + q\,Y(x, y, z)}{X(x, y, z)} = \frac{Z(x, y, z)}{X(x, y, z)}. -$$

Schreibt man die Lösung z in der impliciten Form

$$f(x, y, z) = a,$$

so verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$X \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + Z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

und wir sehen, daß die Integration dieser partiellen Differentialgleichung äquivalent ist mit der Integration des Systems

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y, z)}{X(x, y, z)},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Z(x, y, z)}{X(x, y, z)}.$$

Dieses Ergebnis stimmt genau mit den Entwickelungen von § 4, 3 überein.

§ 36. Die Gleichung $z - px - qy - \frac{p^2 + q^2}{2} = 0$.

1. **Die charakteristischen Streifen.** Wir wollen jetzt als Beispiel die Gleichung

$$z - px - qy - \frac{p^2 + q^2}{2} = 0$$

behandeln.

Die Differentialgleichungen zur Bestimmung der charakteristischen Streifen lauten:

$$\frac{dx}{dt} = -x - p,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - q,$$

$$\frac{dz}{dt} = -px - p^2 - qx - q^2 = z + \frac{p^2 + q^2}{2},$$

$$\frac{dp}{dt} = -(p - p) = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} = -(q - q) = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht integrieren, und man erhält

$$p = \text{constans} = p_0\,,$$
$$q = \text{constans} = q_0\,,$$
$$p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0\,,$$
$$\frac{x + p_0}{y + q_0} = \frac{x_0 + p_0}{y_0 + q_0}\,.$$

Die Konstanten x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 können dabei nicht beliebig gewählt werden, vielmehr muß

$$z_0 - p_0 x_0 - q_0 y_0 - \frac{p_0^2 + q_0^2}{2} = 0$$

sein, und außerdem muß für

$$z = -\frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$-\frac{x^2 + y^2}{2} - px - qy - \frac{p^2 + q^2}{2} = -\frac{1}{2}\left((x + p_0)^2 + (y + q_0)^2\right) = 0$$

sein, und da $x + p_0 = c(y + q_0)$ ist, unter c eine beliebige Konstante verstanden, so muß für

$$z = -\frac{x^2 + y^2}{2}$$

einzeln

$$x = -p_0\,, \qquad y = -q_0$$

sein.

Demnach bekommen wir schließlich folgendes Ergebnis:

Die charakteristischen Streifen der gegebenen Gleichung lassen sich darstellen durch die Gleichungen:

$$(x - a) = c(y - b)\,,$$
$$-a(x - a) - b(y - b) - \left(z + \frac{a^2 + b^2}{2}\right) = 0,$$
$$p = -a\,,$$
$$q = -b\,.$$

Diese Gleichungen lassen eine einfache geometrische Deutung zu. Sie lehren, daß die *Trägerkurven Tangenten an das Paraboloid*

$$\zeta = -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}$$

sind.

In der That hat die Tangentialebene dieses Paraboloides im Punkte

$$\xi = a\,, \qquad \eta = b$$

die Gleichung

$$-a(x - a) - b(y - b) - \left(z - \frac{a^2 + b^2}{2}\right) = 0.$$

Nimmt man hierzu noch die Gleichung

$$(x - a) = c(y - b),$$

so erhält man die Tangenten des Paraboloides.

Die hinzutretenden Gleichungen

$$p = -a, \quad q = -b$$

lehren dann, daß die Flächenelemente der Streifen der Tangentialebene angehören, in welcher die betreffende Tangente liegt.

2. **Eine vollständige Lösung.** Eine vollständige Lösung der gegebenen Differentialgleichung bilden z. B. die Tangentialebenen.

Denn setzen wir

$$z = \omega(x, y, a, b) = -a(x - a) - b(y - b) + \frac{a^2 + b^2}{2},$$

so verschwindet die Funktionaldeterminante nicht:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial a} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial b} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial a} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Außerdem erfüllt

$$z = -a(x - a) - b(y - b) + \frac{a^2 + b^2}{2}$$

die Differentialgleichung. Das folgt schon direkt aus 1.; man kann es aber auch verifizieren. Es ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b,$$

$$z - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\},$$

$$= -a(x - a) - b(y - b) + \frac{a^2 + b^2}{2} + ax + by + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 0.$$

3. **Bestimmung der durch eine gegebene Kurve hindurchzulegenden Integralfläche.** Soll durch die Kurve

$$y_1 = \varphi(x_1),$$
$$z_1 = \psi(x_1)$$

die Integralfläche gelegt werden, so hat man aus den Gleichungen

$$x_1 - a = c\big(\varphi(x_1) - b\big),$$

$$-a(x_1 - a) - b\big(\varphi(x_1) - b\big) - \left(\psi(x_1) - \frac{a^2 + b^2}{2}\right) = 0,$$

$$\psi'(x_1) + a + b\,\varphi'(x_1) = 0$$

a, b und c als Funktionen von x_1 zu bestimmen. Wenn man dann

diese Werte in die Gleichungen für die charakteristischen Streifen einsetzt, so erhält man die gesuchte Integralfläche.

Nehmen wir z. B.

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

so sind die folgenden Gleichungen aufzulösen:

$$x_1 - a = -cb,$$
$$-a(x_1 - a) + b^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} = 0,$$
$$a = 0.$$

Hieraus folgt $a = b = 0$, und das betreffende Integralgebilde erfüllt die Gleichungen

$$x = cy,$$
$$-z = 0,$$
$$p = q = 0,$$

wo c eine beliebige Variable ist, die noch eliminiert werden muß.

Also kommt schließlich

$$z = 0.$$

In der That ist die xy-Ebene eine Integralfläche — sie gehört sogar zu der vollständigen Lösung —, und außerdem enthält sie die x-Axe.

4. **Anwendung der Legendre'schen Transformation.** Wir wollen zeigen, wie man durch Anwendung der Legendre'schen Transformation direkt und ohne die in 1. ausgeführte Integration eines Systems von Differentialgleichungen zu allen diesen Resultaten gelangen kann.

Setzt man nämlich

$$x_1 = -p_1, \quad y_1 = -q, \quad z_1 = xp + yq - z,$$
$$p_1 = -x, \quad q_1 = -y,$$

so verwandelt sich die Gleichung

$$\Omega(x, y, z, p, q) = z - px - qy - \frac{p^2 + q^2}{2} = 0$$

in

$$\Omega_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = z_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = 0.$$

Diese Gleichung kann man also (genau wie die früher behandelte Gleichung $z_1 = 0$) unmittelbar integrieren. Jeder Flächenelementverein, dessen Trägerpunkte auf dem Paraboloid

$$z_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = 0$$

gelegen sind, ist ein Integralgebilde.

Demnach giebt es folgende zweidimensionalen Integralgebilde: Die Vereine P_2, deren Träger auf dem Paraboloid gelegen sind; sie werden dargestellt durch die Gleichungen

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = -\frac{a^2 + b^2}{2},$$

ferner alle C_2, deren Trägerkurven auf dem Paraboloid gelegen sind. Als singuläre Lösung kommt das Paraboloid selbst hinzu, das dargestellt ist durch

$$z_1 = -\frac{x_1^2 + y_1^2}{2}, \quad p_1 = -x_1, \quad q_1 = -y_1.$$

Eindimensionale Integralgebilde sind die Vereine C_1, deren Trägerkurven auf dem Paraboloid liegen, ferner alle jener Vereine K_1 oder L_1, deren Trägerpunkte auf dem Paraboloid sind.

Die charakteristischen L_1 sind gegeben durch die Gleichungen:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = -\frac{a^2 + b^2}{2},$$
$$\alpha(p + a) + \beta(q + b) = 0.$$

Die Axen dieser Vereine sind Tangenten des Paraboloides.

Wendet man nun die inverse Transformation an, so bekommt man wieder die Differentialgleichung

$$z - px - qy - \frac{p^2 + q^2}{2} = 0.$$

Diese inverse Transformation ist übrigens wieder die LEGENDRE'sche Transformation:

$$\begin{aligned} z &= -z_1 + p_1 x_1 + q_1 y_1, \\ x &= -p_1, \\ y &= -q_1, \\ p &= -x_1, \\ q &= -y_1. \end{aligned}$$

Bei dieser LEGENDRE'schen Transformation nun verwandeln sich die soeben bestimmten Integralgebilde der Gleichung

$$\Omega_1 = 0$$

(nach § 31, 4e) in folgende Gebilde:

Die Punkte der Fläche gehen in Tangentialebenen über, die Kurven der Fläche verwandeln sich in abwickelbare Flächen, welche das Paraboloid berühren.

Die L_1, deren Axen Tangenten des Paraboloides sind und deren Trägerpunkte auf dem Paraboloid gelegen sind, verwandeln sich in Elementstreifen. Die Trägerkurve eines solchen Elementstreifens ist eine Tangente, und die Elemente gehören der durch die Tangente gelegten Tangentialebene an. —

Wir sind also hier durch Transformation (ohne Integration) auf dieselben Ergebnisse gekommen, wie vorher durch Integration.

Fünftes Kapitel.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

§ 37. Der Kowalewski'sche Existenzbeweis.

1. **Reduktion der Gleichung auf die Normalform.** Wir wollen zuerst die Existenz der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen nachweisen.

Diese Gleichungen haben die Form

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Der Gleichung (1) kann man, wenn r darin enthalten ist, immer durch Auflösen die folgende Gestalt verleihen

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t). \tag{1'}$$

Wenn die Größe r in (1) nicht mit enthalten ist, dagegen die Größe t, so kann man folgende Substitution machen:

$$\begin{aligned}
&x_1 = y, \quad y_1 = x, \\
&p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y_1} = q_1, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \\
&r = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial y_1^2} = t_1, \quad s = \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial x_1} = s_1, \\
&t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = r_1.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (1) erhält durch diese Substitution die Form

$$F(y_1, x_1, z, q_1, p_1, s_1, r_1) = 0,$$

und man kann nach r_1 auflösen, so daß wieder eine Gleichung von der Form (1') entsteht. —

Wenn endlich F weder r noch t enthält, so mache man die folgende Substitution

$$x = x_1 + y_1,$$
$$y = y_1.$$

Dann wird

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial z}{\partial x_1} = q_1 - p_1,$$
$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = s_1 - r_1,$$

und die Gleichung (1) bekommt durch diese Substitution die Form:

$$F(x_1, y_1 + x_1, z, p_1, q_1 - p_1, s_1 - r_1) = 0.$$

Löst man nach r_1 auf, so bekommt man wieder eine Gleichung von der Form (1′).

Wollen wir also die Existenz von Lösungen beweisen, so können wir dabei immer annehmen, daß die Differentialgleichung in der Form (1′) vorliegt.

2. **Ausführung des Existenzbeweises durch Zurückführung der Normalform auf ein System von Gleichungen.** Um den Kowalewski'schen Existenzbeweis zu führen, betrachten wir das folgende System von linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y},$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Aus diesen sechs Gleichungen können wir die sechs Größen: z, p, q, r, s, t als Funktionen von x und y bestimmen, und dabei können wir überdies für $x = x_0$ die Größen beliebig gewählter Funktionen von y gleichsetzen.

Wir wollen nun für $x = x_0$ folgende Anfangsbedingungen vorschreiben:

$$z_0 = \varphi(y), \quad p_0 = \psi(y),$$
$$q_0 = \varphi'(y), \quad s_0 = \psi'(y), \quad t_0 = \varphi''(y) \,.\, r_0 = f(x_0, y, z_0, p_0, q_0, s_0, t_0).$$

Das System von Lösungen, welches diesen Anfangsbedingungen genügt, wollen wir in folgender Weise bezeichnen:

$$z = Z(x,y), \quad p = P(x,y), \quad q = Q(x,y),$$
$$r = R(x,y), \quad s = S(x,y), \quad t = T(x,y).$$

Zwischen diesen Funktionen bestehen nun noch verschiedene Differentialgleichungen, die wir benützen wollen.

Es ist

$$P = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

und

$$R = \frac{\partial P}{\partial x},$$

also

$$R = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

das heißt

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = 0.$$

Außerdem aber ist

$$Q - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \left(= \varphi'(y) - \varphi'(y)\right)$$

für $x = x_0$.

Die Funktion $Q - \frac{\partial Z}{\partial y}$, welche nur von y abhängt, verschwindet also für $x = x_0$, d. h. es ist allgemein

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

In ähnlicher Weise erkennt man, daß

$$S = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$$

ist; denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0,$$

also $S - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ eine Funktion von y, welche für $x = x_0$, und daher für jeden Wert von x und y verschwindet.

Endlich ist auch entsprechend

$$T = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2},$$

weil

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial y}$$

für jeden Wert von x und y verschwindet.

Die Funktion R endlich erfüllt die Bedingung:

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$- \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(R - f(x, y, Z, P, Q, S, T)) = 0.$$

Da überdies für $x = x_0$

$$R = f(x, y, Z, P, Q, S, T)$$

ist, so ist beständig (für jeden Wert von x und y im Geltungsbereich der Lösung) diese Gleichung erfüllt. Demnach haben wir schließlich folgende Relation:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = f\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right).$$

Die Funktion Z ist also eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung, welche eine gewisse Anfangsbedingung erfüllt: Für $x = x_0$ nimmt Z einen vorgeschriebenen Wert $\varphi(y)$ und $\frac{\partial Z}{\partial x}$ einen vorgeschriebenen Wert $\psi(y)$ an.

3. **Geometrische Deutung des Resultates.** Deutet man die Differentialgleichung geometrisch, so läßt sich das gefundene Resultat bequem veranschaulichen:

Die Integralfläche ist im allgemeinen bestimmt, sobald man einen Elementstreifen derselben kennt (dessen Trägerkurve in der Ebene $x = x_0$ angenommen ist).

Die Anfangsbedingungen haben ja die folgende Form:

$$x = x_0, \quad z_0 = \varphi(y),$$
$$p_0 = \psi(y), \quad q_0 = \varphi'(y).$$

Die beiden ersten Gleichungen definieren eine Kurve, und die beiden letzten zeigen, daß längs dieser Kurve

$$\frac{dz_0}{dx} - p_0\frac{dx_0}{dy} - q_0\frac{dy}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

ist; d. h. daß die Gleichungen einen Verein C_1, einen Elementstreifen definieren.

Während also bei den Gleichungen erster Ordnung die Angabe einer *Kurve*, welche die Integralfläche enthalten soll, im allgemeinen zur Bestimmung der Integralfläche ausreichte (§ 26, 2), ist bei den Gleichungen zweiter Ordnung noch die Angabe der Tangentialebenen längs der Kurve, d. h. die Angabe eines ganzen *Elementstreifens* der Fläche notwendig.

§ 38. Die regulären Krümmungselementvereine.

1. **Das Krümmungselement.** Bei der Behandlung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hatten wir die Begriffe „Flächenelement“ und „Verein von Flächenelementen“ eingeführt (§ 27). Mit Hilfe dieses letzteren Begriffes, der viel allgemeiner ist, als der Begriff „Fläche“, konnten wir sodann die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung übersichtlich darstellen, indem wir Berührungstransformationen anwendeten.

Ähnlich wollen wir nun auch bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgehen. Wir führen zunächst den Begriff „Krümmungselement“ ein.

Unter einem Krümmungselement verstehen wir den Inbegriff der acht Größen: x, y, z, p, q, r, s, t. Dabei sind x, y, z, p, q als Koordinaten eines Flächenelementes aufzufassen und r, s, t als Größen, mit Hilfe deren man die Hauptkrümmungsradien und die Hauptebenen einer das Flächenelement x, y, z, p, q enthaltenden Fläche

$$z = f(x, y)$$

berechnet, für die im Punkte x, y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

ist.

Daß die acht Größen x, y, z, p, q, r, s, t zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien ausreichen, ist aus der Flächentheorie bekannt; denn es sind ja diese Radien die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 \frac{(r t - s^2)}{(1 + p^2 + q^2)^2} - \varrho \left(\frac{(1 + p^2) t - 2 p q s + r (1 + q^2)}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + 1 = 0,$$

und die Hauptebenen sind dadurch bestimmt, daß sie die Normale enthalten und außerdem diejenigen Tangenten

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma}$$

der Fläche, für welche die Gleichung

$$\alpha_2 \{s (1 + p^2) - p q r\} + \alpha \beta \{t (1 + p^2) - r (1 + q^2)\} + \beta^2 \{p q t - s (1 + q^2)\} = 0$$

erfüllt ist.

2. **Krümmungselementvereine.** Die sämtlichen Krümmungselemente einer Fläche erfüllen die Gleichungen:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y},$$

die man auch so schreiben kann:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} - q\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0, \\ (1) \qquad &\frac{\partial p}{\partial t_i} - r\frac{\partial x}{\partial t_i} - s\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1, 2 \ldots k. \\ &\frac{\partial q}{\partial t_i} - s\frac{\partial x}{\partial t_i} - t\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0. \end{aligned}$$

Man hat dann nur noch die Formeln

$$k = 2, \quad t_1 = x, \quad t_2 = y$$

hinzuzufügen.

Wie wir nun früher den Begriff „Fläche" erweitert haben und so zu dem Begriffe „Flächenelementverein" gelangten (§ 27), so werden wir jetzt den Begriff „Krümmungselementverein" aufstellen.

Wir wollen nämlich so definieren: *Ein System von Gleichungen*

$$\begin{aligned} x &= x(t_1 \ldots t_k), \\ y &= y(t_1 \ldots t_k), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t &= t(t_1 \ldots t_k), \end{aligned}$$

wo nicht alle k-reihigen Funktionaldeterminanten verschwinden, stellt einen k-dimensionalen Krümmungselementverein dar, wenn die acht gegebenen Funktionen die Gleichungen (1) *erfüllen.*

3. **Die Dimension von Krümmungselementvereinen.** Man erkennt sofort die Gültigkeit des folgenden Satzes:

Die Dimension eines Krümmungselementvereines kann nicht größer als drei sein.

Denn sobald sie größer als zwei ist, und die Koordinaten x, y, z, p, q nicht sämtlich konstant sind, müßten die dreireihigen Funktionaldeterminanten der x, y, z, p, q nach den t_i verschwinden, die x, y, z, p, q hängen also nur von zwei Variabeln ab, und die r, s, t wären auch zugleich mit bestimmt. — Hängen die x, y, z, p, q nur von einer Variabeln ab, so kann man von den Größen r, s, t nur noch eine beliebig annehmen, die Dimensionszahl könnte also nicht grösser als 2 sein.

Sind aber x, y, z, p, q konstant, so können r, s, t beliebig variieren, d. h.

Ist der Verein dreidimensional, so sind x, y, z, p, q konstant.

Wir wollen, wie wir früher (§ 27, 1) die Größen x, y, z als Koordinaten des Trägers (nullter Stufe) des Flächenelementes x, y, z, p, q bezeichneten, jetzt die Größen x, y, z als Koordinaten des *Trägers nullter Stufe*, x, y, z, p, q als Koordinaten des *Trägers erster Stufe* des Krümmungselementes $x, y, z, p, q; r, s, t$ bezeichnen.

Dann können wir das Resultat, welches wir bei den Vereinen gefunden haben, deren Dimension gleich der Maximalzahl 3 ist, so aussprechen:

Wenn ein Krümmungselementverein dreidimensional ist, so haben die Elemente des Vereines alle denselben Träger erster Stufe.

Wir können nun auch alle Krümmungselementvereine bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß ihre Elemente alle denselben Träger erster Stufe haben.

Solche Vereine können entweder *dreidimensional*, *zweidimensional* oder *eindimensional* sein, da ja r, s, t vollkommen beliebig sind, und man zwischen diesen Größen beliebige Relationen festsetzen kann. (Wir wollen solche Vereine, je nach den Dimensionen, mit E_1, E_2 und E_3 bezeichnen.)

Beispiele: Fügt man zu den Gleichungen

$$x = y = z = p = q = 0$$

keine weitere Gleichung hinzu, so hat man einen dreidimensionalen Verein, fügt man hinzu

$$r = 0,$$

so ist der Verein zweidimensional, fügt man hinzu

$$r = s = 0,$$

so ist er eindimensional.

4. **Reguläre Vereine mit zweidimensionalem Träger.** Da von den Definitionsgleichungen eines Krümmungselementvereines die k ersten die folgende Form haben

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} - p \frac{\partial x}{\partial t_i} - q \frac{\partial y}{\partial t_i} = 0 \, (i = 1, 2 \ldots k),$$

so bilden die Träger erster Stufe einen Verein. Hieraus folgt also, daß wir (abgesehen von den in 3. genannten Vereinen von Elementen mit gemeinsamem Träger) alle anderen bekommen, indem

wir die verschiedenen Arten von Flächenelementvereinen zu Grunde legen, und dann die Funktionen

$$r = r(t_1, t_2),$$
$$s = s(t_1, t_2),$$
$$t = t(t_1, t_2),$$

nachträglich so bestimmen, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t_i} - r\frac{\partial x}{\partial t_i} - s\frac{\partial y}{\partial t_i} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t_i} - s\frac{\partial x}{\partial t_i} - t\frac{\partial y}{\partial t_i} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2$$

ist.

Gehen wir zunächst von dem zweidimensionalen Verein aus, welchen die Elemente erster Stufe einer Fläche bilden, also von den Gleichungen

$$z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

so treten hierzu noch die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(= \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}\right) = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t\left(= \frac{\partial q}{\partial y}\right).$$

Wir wollen die Gesamtheit dieser Elemente als „Krümmungselemente einer Fläche“ bezeichnen oder kurz als „Vereine $F_{2,2}$“.

Beispiel:

$$z = p = q = 0, \quad r = s = t = 0.$$

Die beiden anderen Arten von zweidimensionalen Flächenelementvereinen können nicht Träger von Krümmungselementvereinen sein, bei denen die drei Größen r, s und t endlich sind (vgl. § 39).

5. **Reguläre Vereine mit eindimensionalem Träger.** Ist der Träger erster Stufe eindimensional, und zwar zunächst ein Elementstreifen, so wird er dargestellt durch die Gleichungen

$$z = z(x), \quad y = y(x),$$
$$\frac{dz}{dx} - p - q\frac{dy}{dx} = 0.$$

Die beiden Gleichungen

$$\frac{dp}{dx} - r - s\frac{dy}{dx} = 0,$$
$$\frac{dq}{dx} - s - t\frac{dy}{dx} = 0$$

bestimmen dann noch zwei von den Größen r, s, t als Funktion von x und der dritten Größe.

Hieraus folgt: *Ist das Trägergebilde erster Stufe ein Elementstreifen, so ist der Verein entweder zweidimensional* ($C_{1,2}$), *oder eindimensional* ($C_{1,1}$).

Beispiel: Der Verein

$$y = z = p = q = 0, \quad r = s = 0$$

ist *zweidimensional*, denn x und t variieren beliebig. Setzt man nachträglich noch $t = 0$, so bekommt man einen *eindimensionalen* Verein. —

Der Fall, daß das Trägergebilde ein Elementarkegel (§ 27, 4b) oder ein Linienelement (§ 27, 4c) ist, wird ebenfalls in § 39 behandelt.

§ 39. Die nichtregulären Krümmungselementvereine.

1. **Einführung des Begriffes.** Wir müssen außer den sechs Arten von regulären Elementvereinen auch solche betrachten, welche nicht regulär sind, d. h. solche, welche die Eigenschaft haben, daß mindestens eine der Größen r, s, t nicht endlich ist.

Das folgende Beispiel zeigt uns, daß diese Erweiterung notwendig ist.

Gegeben sei die (abwickelbare) Fläche

$$x = u + v,$$
$$2y = u^2 + 2uv,$$
$$3z = u^3 + 3u^2 v.$$

Man berechnet hieraus mit Hilfe der Formeln

$$du = \frac{dx\frac{\partial y}{\partial v} - dy\frac{\partial x}{\partial v}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)},$$

$$dv = \frac{-dx\frac{\partial y}{\partial u} + dy\frac{\partial x}{\partial u}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}\right)},$$

die folgenden Werte für die Koordinaten p, q, r, s, t der Krümmungselemente der Fläche:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -u^2, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2u,$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2u^2}{v}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2u}{v}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{v}.$$

Alle diese Größen sind endlich in allen Punkten der Fläche,

ausgenommen für $v = 0$. Hier sind sie nicht mehr **regulär**, wie wir sagen wollen. (Diese Punkte bilden die Rückkehrkante der durch die Gleichungen dargestellten Fläche; die Fläche besteht aus allen Tangenten der Kurve, welche durch die Gleichungen

$$x = u,$$
$$y = \frac{u^2}{2},$$
$$z = \frac{u^3}{3}$$

dargestellt ist.)

Man kann nun aber den Begriff „Krümmungselement" auch noch in diesen Punkten aufrecht erhalten, und man kann Koordinaten einführen, welche auch für die Rückkehrkante endliche Werte behalten. Wir wollen nämlich die folgenden Substitutionen machen:

$$r = -\frac{\varrho}{\varphi}, \quad s = -\frac{\sigma}{\varphi}, \quad t = -\frac{\tau}{\varphi},$$
$$\varrho\tau - \sigma^2 + \varphi\psi = 0.$$

In unserem Beispiele haben wir dann zu setzen

$$\varrho = 2u^2, \quad \sigma = -2u, \quad \tau = 2,$$
$$\varphi = -v, \quad \psi = 0.$$

Diese Koordinaten *versagen nicht*, wenn v verschwindet.

2. **Gleichungen der Krümmungselementvereine.** Da diese neuen Koordinaten auch dann endliche Werte behalten, wenn r, s, t nicht mehr endlich sind, so wollen wir sie allgemein einführen und müssen nun noch die Definitionsgleichungen der Krümmungselementvereine entsprechend umformen.

An Stelle von

$$\frac{\partial p}{\partial t_i} - r\frac{\partial x}{\partial t_i} - s\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0$$

tritt

$$\varphi\frac{\partial p}{\partial t_i} + \varrho\frac{\partial x}{\partial t_i} + \sigma\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0,$$

an Stelle von

$$\frac{\partial q}{\partial t_i} - s\frac{\partial x}{\partial t_i} - t\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0$$

tritt

$$\varphi\frac{\partial q}{\partial t_i} + \sigma\frac{\partial x}{\partial t_i} + \tau\frac{\partial y}{\partial t_i} = 0.$$

Außerdem sind aber noch zwei weitere Relationen erfüllt: Erstens ist

$$\tau \frac{\partial p}{\partial t_i} - \sigma \frac{\partial p}{\partial t_i} - \psi \frac{\partial x}{\partial t_i} = \frac{\tau}{\varrho} \cdot \left\{ - \varrho \frac{\partial x}{\partial t_i} - \sigma \frac{\partial y}{\partial t_i} \right\}$$
$$- \frac{\sigma}{\varphi} \left\{ - \sigma \frac{\partial x}{\partial t_i} - \tau \frac{\partial y}{\partial t_i} \right\} - \psi \frac{\partial x}{\partial t_i} = \frac{1}{\varphi} \left\{ \sigma^2 - \varrho \tau - \varphi \psi \right\} \frac{\partial y}{\partial t_i} = 0;$$

zweitens aber ist

$$\sigma \frac{\partial p}{\partial t_i} - \varrho \frac{\partial q}{\partial t_i} + \psi \frac{\partial y}{\partial t_i} = \frac{\sigma}{\varphi} \left\{ - \varrho \frac{\partial x}{\partial t_i} - \sigma \frac{\partial y}{\partial t_i} \right\} - \frac{\varrho}{\varphi} \left\{ - \sigma \frac{\partial x}{\partial t_i} - \tau \frac{\partial x}{\partial t_i} \right\}$$
$$+ \psi \frac{\partial y}{\partial t_i} = \frac{1}{\varphi} \left\{ \varrho \tau - \sigma^2 + \varphi \psi \right\} = 0.$$

Demnach werden wir nun die Krümmungselementvereine so definieren:

Die Gleichungen

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
x &= x(t_1 \dots t_k), \\
y &= y(t_1 \dots t_k), \\
z &= z(t_1 \dots t_k), \\
p &= p(t_1 \dots t_k), \\
q &= q(t_1 \dots t_k), \\
\varrho &= \varrho(t_1 \dots t_k), \\
\sigma &= \sigma(t_1 \dots t_k), \\
\tau &= \tau(t_1 \dots t_k), \\
\varphi &= \varphi(t_1 \dots t_k), \\
\psi &= \psi(t_1 \dots t_k)
\end{aligned}
$$

definieren einen Verein von Krümmungselementen, wenn die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t_i} - p \frac{\partial x}{\partial t_i} - q \frac{\partial y}{\partial t_i} &= 0, \\
\varphi \frac{\partial p}{\partial t_i} + \varrho \frac{\partial x}{\partial t_i} + \sigma \frac{\partial y}{\partial t_i} &= 0, \\
\varphi \frac{\partial q}{\partial t_i} + \sigma \frac{\partial x}{\partial t_i} + \tau \frac{\partial y}{\partial t_i} &= 0, \qquad i = 1, 2 \dots k, \\
\tau \frac{\partial p}{\partial t_i} - \sigma \frac{\partial q}{\partial t_i} - \psi \frac{\partial x}{\partial t_i} &= 0, \\
\sigma \frac{\partial p}{\partial t_i} - \varrho \frac{\partial q}{\partial t_i} + \psi \frac{\partial y}{\partial t_i} &= 0
\end{aligned}
$$

und außerdem die Gleichung

$$\varrho \tau - \sigma^2 + \varphi \psi = 0.$$

Man bemerkt sofort, daß das Gleichungssystem sich auf das

frühere System reduziert, sobald φ nicht verschwindet. In diesem Fall, der schon in § 38 erledigt ist, wollen wir die Krümmungselemente und ebenso die aus ihnen gebildeten Vereine *regulär* nennen.

Dagegen sollen unter *nicht regulären* Elementen solche verstanden werden, für die φ verschwindet, und unter *nicht regulären Krümmungselementvereinen* solche, deren sämtliche Elemente nicht regulär sind.

3. **Nicht reguläre Krümmungselementvereine.** Die regulären Krümmungselementvereine haben wir schon in § 38 bestimmt. Es bleiben die *nicht regulären* Vereine.

Wir erhalten dieselben, genau wie die regulären, indem wir klassifizieren nach der Art des Trägergebildes erster Stufe. Zunächst wollen wir annehmen, das Trägergebilde sei eines der im vorigen Paragraphen behandelten.

Erster Fall: Der Träger besteht aus einem einzigen Flächenelement. Die Gleichungen sind dann erfüllt, wenn man $\varrho\tau - \sigma^2 = 0$ setzt, und wir erhalten daher entweder einen zweidimensionalen $(\overline{E}_2)$ oder einen eindimensionalen Verein $(\overline{E}_1)$.

Zweiter Fall: Das Trägergebilde ist ein Elementstreifen; dann sind, sobald man $\varphi = 0$ setzt, die Verhältnisse der Größen $\varrho, \tau, \sigma, \psi$ bestimmt (da die Determinante der vier letzten Gleichungen (2) verschwindet). Diese Vereine bezeichnen wir mit $\overline{C}_{1,1}$.

Wir erhalten also einen eindimensionalen Verein.

(Beispiel: $y = z = p = q = 0$, $\varphi = \sigma = \psi = 0$.)

Dazu kommen nun noch folgende Klassen:

Dritter Fall: Das Trägergebilde ist ein P_2. (Wir bezeichnen die Vereine mit $\overline{P}_{2,2}$.) Dann ist $\varphi = \varrho = \sigma = \tau = 0$; x, y und z sind konstant, p und q sind beliebig. (Dieser Fall entspricht den Punktkreisen § 20, 2.)

Vierter Fall: Das Trägergebilde ist ein Verein C_2; dann muß φ ebenfalls verschwinden, und es sind $\varrho, \sigma, \tau, \psi$ bestimmt $(\overline{C}_{2,2})$.

(Beispiel: $y = z = 0$, $p = 0$, $\varrho = \sigma = \psi = 0$.)

Fünfter Fall: Das Trägergebilde ist ein Elementarkegel, d. h. x, y, z sind konstant und q ist eine Funktion von p. Dann sind noch die Gleichungen zu erfüllen.

$$\tau - \sigma \frac{dq}{dp} = 0, \quad \sigma - \varrho \frac{dq}{dt} = 0.$$

Wir erhalten also einen zweidimensionalen Verein $(\overline{K}_{1,2})$. Wird über-

dies noch eine Gleichung zwischen ϱ, σ, τ und ψ vorgeschrieben, so wird der Verein eindimensional ($\overline{K}_{1,1}$).

Sechster Fall: Artet der Kegel in Linienelement aus, so bekommen wir zwei weitere Klassen ($\overline{L}_{1,2}$ und $\overline{L}_{1,1}$) von nicht regulären Vereinen.

Zu den *sechs* Arten von regulären Vereinen (eine Art von dreidimensionalen, drei von zweidimensionalen, zwei von eindimensionalen) treten also noch *neun* Klassen von nicht regulären, von denen fünf zweidimensional und vier eindimensional sind.

4. **Der Begriff der Oskulation.** Zwei Flächen oskulieren sich in einem Punkt — oder, wie wir sagen wollen, in einem Krümmungselement —, wenn sie einen Punkt gemeinsam haben, wenn sie in diesem Punkte eine gemeinsame Tangentialebene haben (d. h. also ein gemeinsames Flächenelement) — und wenn außerdem die zweiten Differentialquotienten r, s, t, gebildet für die beiden Flächen in diesem Punkt, übereinstimmen.

Diese Definition haben wir nun zu verallgemeinern, genau so wie früher (§ 28) die Definition der Berührung.

Wir definieren in folgender Weise:

Zwei Krümmungselementvereine oskulieren sich, wenn sie ein gemeinsames Krümmungselement haben.

Z. B. oskulieren die beiden Vereine

$$x = y = z = p = q = 0 \, (E_3)$$

und

$$z = p = q = r = s = t = 0 \, (F_{2,2})$$

in dem gemeinsamen Krümmungselement

$$x = y = z = p = q = r = s = t = 0 .$$

Entsprechend haben wir die Oskulation längs eines eindimensionalen Vereins zu definieren.

Wir sagen: *Zwei zweidimensionale Vereine oskulieren sich in einem eindimensionalen Verein, wenn alle Elemente dieses letzteren den beiden zweidimensionalen Vereinen gleichzeitig angehören.*

Z. B. oskulieren sich die beiden regulären Vereine:

$$x = y = z = p = q = r = 0 \, (E_2)$$

und

$$y = z = p = q = r = s = 0 \, (C_{1,2})$$

in dem Verein

$$x = y = z = p = q = r = s = 0 \, (E_1),$$

und die beiden nicht regulären Vereine:

$$x = y = z = \varphi = \varrho = \sigma = \tau = 0 \; (\overline{P}_{2,2})$$

und

$$y = z = p = 0, \quad \varphi = \varrho = \sigma = 0 \; (\overline{C}_{2,2})$$

in dem Verein

$$x = y = z = p = \varphi = \varrho = \sigma = \tau = 0 \; (\overline{L}_{1,1}).$$

§ 40. Die erweiterten Berührungstransformationen.

1. Das Problem der Erweiterung der Berührungstransformationen. Wie wir in § 30 die Punkttransformationen durch Hinzunahme von einigen Gleichungen erweiterten und auf diese Weise eine spezielle Klasse von Berührungstransformationen erhielten, so wollen wir jetzt versuchen, die Berührungstransformationen in der Weise zu erweitern, daß *Oskulationstransformationen* entstehen.

Hier sind die Oskulationstransformationen zu definieren als *Transformationen der Krümmungselemente, welche jeden Krümmungselementverein wieder in einen Krümmungselementverein überführen.*

Eine Berührungstransformation führt jeden Flächenelementverein wieder in einen Flächenelementverein über, sie verwandelt also jedenfalls das Gebilde der Träger erster Stufe wieder in ein Gebilde, dessen Elemente in ihrer Gesamtheit die Träger eines Krümmungselementvereines sein können.

Damit nun thatsächlich auch jeder Krümmungselementverein wieder in einen Krümmungselementverein übergeht, muß man zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= X(x, y, z, p, q), \\ y_1 &= Y(x, y, z, p, q), \\ z_1 &= Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 &= P(x, y, z, p, q), \\ q_1 &= Q(x, y, z, p, q) \end{aligned} \tag{1}$$

noch drei weitere Gleichungen hinzufügen:

$$\begin{aligned} r_1 &= R(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ s_1 &= S(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ t_1 &= T(x, y, z, p, q, r, s, t), \end{aligned} \tag{1'}$$

und man muß von den Funktionen R, S, T verlangen, daß die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial t_i} - R\frac{\partial X}{\partial t_i} - S\frac{\partial y}{\partial t_i} = \alpha_1\left(\frac{\partial z}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} - q\frac{\partial y}{\partial t_i}\right)\\
&\qquad + \alpha_2\left(\frac{\partial p}{\partial t_i} - r\frac{\partial x}{\partial t_i} - s\frac{\partial y}{\partial t_i}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial q}{\partial t_i} - s\frac{\partial x}{\partial t_i} - t\frac{\partial y}{\partial t_i}\right),\\
&\frac{\partial Q}{\partial t_i} - S\frac{\partial X}{\partial t_i} - T\frac{\partial Y}{\partial t_i} = \beta_1\left(\frac{\partial z}{\partial t_i} - p\frac{\partial x}{\partial t_i} - q\frac{\partial y}{\partial t_i}\right)\\
&\qquad + \beta_2\left(\frac{\partial p}{\partial t_i} - r\frac{\partial x}{\partial t_i} - s\frac{\partial y}{\partial t_i}\right) + \beta_3\left(\frac{\partial q}{\partial t_i} - s\frac{\partial x}{\partial t_i} - t\frac{\partial y}{\partial t_i}\right).
\end{aligned}
$$

Diese Forderungen besagen ja eben, daß ein Krümmungselementverein des Raumes x, y, z, p, q, r, s, t übergeht in einen Krümmungselementverein des Raumes $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1$.

Man kann nun die Gleichungen (2) ganz analog wie in § 20, 5 ersetzen durch vier andere, einfachere Gleichungen, welche den Gleichungen (2) vollkommen äquivalent sind und mit ihnen in *umkehrbar eindeutigem* Zusammenhange stehen.

Es sind dies die folgenden Gleichungen

$$
(2')\quad
\begin{aligned}
&\frac{dP}{dx} - R\frac{dX}{dx} - S\frac{dY}{dx} = 0,\\
&\frac{dP}{dy} - R\frac{dX}{dy} - S\frac{dY}{dy} = 0,\\
&\frac{dQ}{dx} - S\frac{dX}{dx} - T\frac{dY}{dx} = 0,\\
&\frac{dQ}{dy} - S\frac{dX}{dy} - T\frac{dY}{dy} = 0.
\end{aligned}
$$

In diesen Gleichungen ist folgende Abkürzung gebraucht:

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} + r\frac{\partial F}{\partial p} + s\frac{\partial F}{\partial q},\\
\frac{dF}{dy} &= \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + s\frac{\partial F}{\partial p} + t\frac{\partial F}{\partial q}.
\end{aligned}
$$

2. **Die erweiterten Gleichungen.** Um die erweiterte Transformation zu erhalten, muß man nun die vier Gleichungen (2′) nach R, S, T auflösen. Dabei ergeben sich die Werte:

$$
R = \frac{\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dP}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dY}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}}, \quad S = \frac{\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dX}{dx} - \frac{dP}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} - \frac{dY}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}}
$$

aus den beiden ersten Gleichungen. Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$S=\frac{\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}}\ \text{und}\ T=\frac{\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dX}{dx}-\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}}.$$

Wir bekommen also für R und T je einen Wert, für S dagegen zwei Werte, und es muß noch gezeigt werden, daß die beiden Werte identisch sind, d. h. daß die Gleichung besteht:

$$\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}=\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dX}{dx}-\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}.$$

Dies wollen wir jetzt nachweisen mit Hülfe der Identität:

$$\frac{d^2F}{dx\,dy}=\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}+p\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial z}+q\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial z}+pq\cdot\frac{\partial^2F}{\partial z^2}$$
$$+r\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial q}+t\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial q}+s\cdot\left\{\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial q}+\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial p}+r\frac{\partial^2F}{\partial p^2}+t\frac{\partial^2F}{\partial q^2}\right\}$$
$$+\frac{\partial^2F}{\partial z\,\partial p}\cdot(ps+rq)+\frac{\partial^2F}{\partial z\,\partial q}(tp+sq)+\frac{\partial^2F}{\partial p\,\partial q}\cdot\{rt+s^2\}$$
$$=\frac{d^2F}{dy\,dx}.$$

Differenziert man nämlich den Ausdruck:

$$U=\frac{dZ}{dx}-P\frac{dX}{dx}-Q\frac{dY}{dx}(=0)$$

nach y, d. h. bildet man

$$\frac{dU}{dy},$$

und subtrahiert davon

$$\frac{dV}{dx},$$

wo

$$V=\frac{dZ}{dy}-P\frac{dX}{dy}-Q\frac{dY}{dy}(=0)$$

ist, so kommt

$$\frac{d^2Z}{dx\,dy}-\frac{d^2Z}{dy\,dx}-\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dX}{dx}+\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dX}{dy}-\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}+\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}$$
$$-P\left(\frac{d^2X}{dx\,dy}-\frac{d^2X}{dy\,dx}\right)-Q\left(\frac{d^2Y}{dx\,dy}-\frac{d^2Y}{dy\,dx}\right)=0,$$

oder, zufolge der abgeleiteten Formel:

$$\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dX}{dx}-\frac{dX}{dy}\cdot\frac{dP}{dx}-\left(\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Damit ist die zu erweisende Identität der beiden erhaltenen Werte von S und also auch die *Existenz der erweiterten Berührungstransformationen* erwiesen.

3. **Beispiele.** Wir wollen gleich mit zwei früher aufgestellten Berührungstransformationen die Erweiterungen vornehmen.

a) Die LEGENDRE'sche Transformation.

Diese Transformation ist gegeben durch die Formeln:

$$x_1 = -p,$$
$$y_1 = -q,$$
$$z_1 = xp + yq - z,$$
$$p_1 = -x,$$
$$q_1 = -y.$$

Die zur Erweiterung dienenden Formeln sind:

$$\frac{dp_1}{dx} - r_1 \frac{dx_1}{dx} - s_1 \frac{dy_1}{dx} = -1 + r_1 r + s_1 s = 0,$$
$$\frac{dp_1}{dy} - r_1 \frac{dx_1}{dy} - s_1 \frac{dy_1}{dy} = r_1 s + s_1 t = 0,$$
$$\frac{dq_1}{dx} - s_1 \frac{dx_1}{dx} - t_1 \frac{dy_1}{dx} = s_1 r + t_1 s = 0,$$
$$\frac{dq_1}{dy} - s_1 \frac{dx_1}{dy} - t_1 \frac{dy_1}{dy} = -1 + s_1 s + t_1 t = 0,$$

und ergeben die folgenden Auflösungen:

$$r_1 = \frac{t}{rt - s^2},$$
$$s_1 = \frac{-s}{rt - s^2},$$
$$t_1 = \frac{r}{rt - s^2}.$$

b) Die Dilatation.

Wir gehen aus von den Formeln

$$x_1 = x + \frac{p}{n^{\frac{1}{2}}},$$
$$y_1 = y + \frac{q}{n^{\frac{1}{2}}},$$
$$z_1 = z - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$
$$p_1 = p,$$
$$q_1 = q,$$

in denen

$$(1 + p^2 + q^2) = n$$

gesetzt ist.

Zur Erweiterung dienen die Gleichungen:

$$r n^{\frac{3}{2}} - r_1 \{n^{\frac{3}{2}} + r(1 + q^2) - p q s\} - s_1 \{s(1 + p^2) - p q r\} = 0,$$
$$s n^{\frac{3}{2}} - r_1 \{s(1 + q^2) - p q t\} - s_1 \{n^{\frac{3}{2}} + t(1 + p^2) - p q s\} = 0,$$
$$s n^{\frac{3}{2}} - s_1 \{n^{\frac{3}{2}} + r(1 + q^2) - p q s\} - t_1 \{s(1 + p^2) - p q r\} = 0,$$
$$t n^{\frac{3}{2}} - s_1 \{s(1 + q^2) - p q t\} - s_1 \{n^{\frac{3}{2}} + t(1 + p^2) - p q s\} = 0,$$

welche die folgenden Gleichungen ergeben:

$$R = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{N} [r \{n^{\frac{3}{2}} + t(1 + p^2) - p q s\} - s \{s(1 + p^2) - p q r\}]$$
$$= n^{\frac{3}{2}} [r n^{\frac{3}{2}} + (r t - s^2)(1 + p^2)] : N,$$
$$S = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{N} [s \{n^{\frac{3}{2}} + r(1 + q^2) - p q s\} - r \{s(1 + q^2) - p q t\}$$
$$= n^{\frac{3}{2}} [s n^{\frac{3}{2}} + p q (r t - s^2)] : N,$$
$$T = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{N} [t \{n^{\frac{3}{2}} + r(1 + q^2) - p q s\} - s \{s(t + q^2) - p q t\}]$$
$$= n^{\frac{3}{2}} [t n^{\frac{3}{2}} + (r t - s^2)(1 + q^2)] : N,$$

und wo N die folgende Bedeutung hat:

$$N = (r t - s^2) - n^{\frac{1}{2}} \left(r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2 p q s \right) + n^2.$$

4. **Transformation der nicht regulären Elementvereine.** Von den erweiterten Berührungstransformationen haben wir gezeigt, daß sie einen Verein von Krümmungselementen immer wieder in einen Verein von Krümmungselementen überführen. Wir haben aber beim Nachweis dieser Eigenschaft von den Koordinaten r, s, t Gebrauch gemacht, welche nur für reguläre Krümmungselemente einen Sinn haben. Es ist also eigentlich nur folgendes bewiesen worden: *Gehen bei einer erweiterten Berührungstransformation die Elemente eines Krümmungselementvereines, der regulär ist, wieder in reguläre Elemente über, so bilden diese Elemente wieder einen regulären Verein.*

Die Ausnahmestellung der nicht regulären Elemente läßt sich aber sofort beseitigen, indem man r, s, t ersetzt durch die allgemeinen Koordinaten

$$\varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi.$$

Entsprechend hat man natürlich auch die Größen r, s, t zu ersetzen durch

$$\varrho_1, \sigma_1, \tau_1, \varphi_1, \psi_1.$$

Da die Verhältnisse der $\varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi$ durch die r, s, t eindeutig bestimmt sind, und ebenso die Verhältnisse der $\varrho_1, \sigma_1, \tau_1, \varphi_1, \psi_1$ durch die r_1, s_1, t_1, so werden auch die Verhältnisse der fünf Koordinaten

$$\varrho_1, \sigma_1, \tau_1, \varphi_1, \psi_1$$

eindeutig bestimmt durch die Verhältnisse der Größen:

$$\varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi.$$

Weiter aber sind die Bedingungen eines Elementvereines, ausgedrückt in den Koordinaten $\varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi$, und ausgedrückt in den Koordinaten r, s, t einander äquivalent. Dasselbe gilt natürlich auch in Bezug auf die $\varrho_1, \sigma_1, \tau_1, \varphi_1, \psi_1$ und r_1, s_1, t_1.

Hieraus folgt also schließlich, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \frac{\partial p_1}{\partial t_i} + \varrho_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \sigma_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_i} &= 0,\\
\varphi_1 \frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \sigma_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \tau_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_i} &= 0,\\
\tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial t_i} - \sigma_1 \frac{\partial q_1}{\partial t_i} - \psi_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_i} &= 0,\\
\sigma_1 \frac{\partial p_1}{\partial t_i} - \varrho_1 \frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \psi_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_i} &= 0
\end{aligned}$$

gelten, sobald die entsprechenden Gleichungen in den $x, y, z, p, q, \varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi$ bestehen.

Dadurch haben wir den Satz gewonnen:

Führt man in die Formeln einer erweiterten Berührungstransformation die Größen $\varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi$ an Stelle von r, s, t und $\varrho_1, \sigma_1, \tau_1, \varphi_1, \psi_1$ an Stelle von r_1, s_1, t_1 ein, so entstehen allgemeinere Gleichungen, vermöge deren nun ausnahmslos jeder Krümmungselementverein wieder in einen Krümmungselementverein übergeht.

Es gilt dann auch ausnahmslos der Satz:

Oskulieren sich zwei Vereine in einem Element oder in einem ganzen Verein von Elementen, so oskulieren sich die transformierten Vereine wieder in einem Element oder in einem ganzen Verein von Elementen.

5. **Anwendung auf die erweiterte Legendre'sche Transformation.** Bei der Legendre'schen Transformation verwandeln sich die Gleichungen

$$r_1 = \frac{t}{rt - s^2}, \quad s_1 = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad t_1 = \frac{r}{rt - s^2}$$

durch Einführung der allgemeinen Koordinaten in

$$\varrho_1 = \alpha\,\tau\,,$$
$$\sigma_1 = -\,\alpha\,\sigma\,,$$
$$\tau_1 = \alpha\,\varrho\,,$$
$$\varphi_1 = \alpha\,\psi\,,$$
$$\psi_1 = \alpha\,\varphi\,,$$

in denen die Größe α einen unbestimmten Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Die Richtigkeit dieser Formeln erkennt man sofort. Es folgt aus ihnen

$$r_1 = -\frac{\varrho_1}{\varphi_1} = -\frac{\tau}{\psi} = \frac{-\frac{\tau}{\varphi}}{\frac{\psi}{\varphi}} = \frac{-t}{-\left(\frac{\varrho\,\tau - \sigma^2}{\varphi^2}\right)} = \frac{-t}{s^2 - r\,t} = \frac{t}{r\,t - s^2}\,,$$

und ebenso

$$t_1 = -\frac{\tau_1}{\varphi_1} = -\frac{\varrho}{\psi} = \frac{-\frac{\varrho}{\varphi}}{\frac{\psi}{\varphi}} = \frac{-r}{s^2 - r\,t} = \frac{r}{r\,t - s^2}\,,$$

und endlich auch

$$s_1 = -\frac{\sigma_1}{\varphi_1} = -\frac{s}{r\,t - s^2}\,.$$

Aus der Darstellung der erweiterten LEGENDRE'schen Transformation durch allgemeine Koordinaten können wir jetzt sehr leicht die Eigenschaften der Transformation studieren, also die Frage beantworten:

Wie verwandeln sich bei der erweiterten LEGENDRE'schen Transformation die verschiedenen Arten von Krümmungselementvereinen?

Diese Frage können wir auch deswegen leicht beantworten, weil wir bereits früher (§ 31, 4) die LEGENDRE'sche Transformation untersucht haben und nun von den damals gefundenen Ergebnissen Gebrauch machen können.

Wir wissen ja nun schon, wie sich das Trägergebilde erster Stufe transformiert, und brauchen nun nur noch festzustellen, wie sich die Krümmungselemente transformieren, welche sich auf die Flächenelemente als Träger stützen.

Dabei finden wir folgende Ergebnisse:

Die Vereine E_1, E_2 und E_3 verwandeln sich wieder in Vereine derselben Art, denn einem Flächenelement entspricht wieder ein Flächenelement, und einem μ-dimensionalen Krümmungselementverein wieder ein μ-dimensionaler Krümmungselementverein.

Ein Verein $\overline{P}_{2,\,2}$ verwandelt sich in eine Ebene. In der That, aus

$$x = a\,,$$
$$y = b\,,$$
$$z = c\,,$$
$$\varphi = \varrho = \sigma = \tau = 0$$

wird

$$z_1 + a x_1 + b y_1 = c\,,$$
$$p_1 = -a\,,$$
$$q_1 = -b\,,$$
$$\varrho_1 = \tau_1 = \sigma_1 = \psi_1 = 0\,,$$

d. h.

$$0 = r_1 = s_1 = t_1\,, \quad r_1 t_1 - s_1^2 = 0\,.$$

Ein Verein $\overline{C}_{2,2}$ verwandelt sich in eine abwickelbare Fläche: In der That wird aus

$$y = f_1(x)\,,$$
$$z = f_2(x)\,,$$
$$f_2'(x) - p - q f_1'(x) = 0\,,$$
$$\sigma = -\tau f_1'(x)\,,$$
$$\varrho = \tau (f_1'(x))^2\,, \quad \varphi = 0\,,$$
$$\psi = -\tau f_1(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x}$$

folgendes System von Gleichungen:

$$z_1 = -x_1 x - y_1 f_1(x) - f_2(x)\,,$$
$$p_1 = -x\,,$$
$$q_1 = -f_1(x)\,,$$
$$f_2'(x) + x_1 + y_1 f_1'(x) = 0\,,$$
$$\psi_1 = 0\,,$$
$$\sigma_1 = \varrho_1 \cdot (f_1'(x))\,,$$
$$\tau_1 = \varrho_1 (f_1'(x))^2\,,$$
$$\varphi_1 = -\varrho_1 f_1'(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x}\,,$$

welches (vgl. § 31, 4c) eine abwickelbare Fläche darstellt.

Von den übrigen Arten von Vereinen wollen wir noch die $\overline{L}_{1,2}$ hervorheben.

Aus dem Verein

$$x = a\,, \quad y = b\,, \quad z = c\,,$$
$$q = \alpha p + \beta\,,$$
$$\varphi = 0\,,$$
$$\sigma = \varrho \cdot \alpha\,,$$
$$\tau = \varrho \cdot \alpha^2$$

wird

$$p_1 = -a, \quad q_1 = -b, \quad y_1 = \alpha x_1 - \beta,$$
$$z_1 = -x_1(a + b\alpha) + \beta b - c,$$
$$\psi_1 = 0,$$

d. h. also

$$\varrho_1 \tau_1 - \sigma_1^2 = \tau_1 \cdot \alpha^2 - \tau_1^2 \alpha^2 = 0,$$

d. h. ein Krümmungselementstreifen $C_{1,2}$, dessen Trägergebilde ein ebener Flächenelementstreifen ist; das Trägergebilde nullter Stufe ist eine gerade Linie.

Es ist nun leicht, auch zu untersuchen, wie die anderen Klassen von Elementvereinen sich transformieren. Doch wollen wir darauf nicht weiter eingehen.

6. **Die allgemeinen Oskulationstransformationen.** Man könnte die Frage aufwerfen: Giebt es außer den erweiterten Berührungstransformationen nicht noch allgemeinere Oskulationstransformationen, bei denen nicht jedes Flächenelement wieder in ein Flächenelement übergeht? — Diese Frage liegt deswegen nahe, weil wir früher außer den erweiterten Punkttransformationen noch zwei andere Klassen von Berührungstransformationen kennen gelernt hatten (§ 31 u. 32), bei denen die Punkte nicht wieder in Punkte übergingen.

Die Antwort ist verneinend, denn bei einer solchen Oskulationstransformation müßte ein Verein E_3 wieder in einen dreidimensionalen Krümmungselementverein übergehen, dessen Trägergebilde sich nun aber nicht wieder auf ein einziges Flächenelement reduzieren dürfte, weil sonst die Transformation notwendig eine erweiterte Berührungstransformation sein würde. Nun sind aber die E_3 die einzigen dreidimensionalen Krümmungselementvereine, welche es giebt, also ist eine solche Transformation nicht möglich. D. h. also:

Außer den erweiterten Berührungstransformationen giebt es keine allgemeinere Klasse von Oskulationstransformationen.

§ 41. Integration der Gleichung $\varphi = 0$ und verwandter Gleichungen.

1. **Das verallgemeinerte Integrationsproblem.** Unter dem Integrationsproblem einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung wollen wir folgende Aufgabe verstehen:

Gegeben ist eine Gleichung

(1) $$F(x, y, z, p, q, \varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi) = 0,$$

welche in den Variabeln $\varrho, \sigma, \tau, \varphi, \psi$ *homogen ist. Man soll nun alle Krümmungselementvereine bestimmen, deren Elemente der durch die Gleichung* (1) *definierten Schar angehören, vor allem diejenigen zweidimensionalen, welche ein zweidimensionales Trägergebilde erster Stufe besitzen.*

(Diese letzteren wollen wir als eigentliche Integralgebilde bezeichnen, weil sie die einzigen sind, die durch Berührungstransformationen in F_{22} übergeführt werden können.)

Unter dieses Problem ordnet sich die Frage nach der Bestimmung der Integralflächen einer Gleichung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \left(= F\left(x, y, z, p, q, -\frac{\varrho}{\varphi}, \quad -\frac{\sigma}{\varphi}, \quad -\frac{\tau}{\varphi}\right)\right)$$

als eine ganz spezielle Frage unter, denn die Flächen sind ja nur eine Art von zweidimensionalen Krümmungselementvereinen mit zweidimensionalem Trägergebilde erster Stufe.

Ferner aber braucht eine Differentialgleichung im erweiterten Sinn die Größen r, s, t nicht zu enthalten, sie darf sogar auch von p und q frei sein. Das verallgemeinerte Integrationsproblem behält auch dann noch seine Bedeutung (vgl. § 33, 1 am Schluß).

2. **Die Gleichung** $\varphi = 0$. Die Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $\varphi = 0$ gestaltet sich nun fast ebenso einfach, wie früher die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $z = 0$:

Die geforderte Integration ist identisch mit der Aufzählung aller Arten von nicht regulären Krümmungselementvereinen.

Die Integration dieser Gleichung ist also bereits in § 39 geleistet.

Wir wollen nur noch auf einige Beziehungen aufmerksam machen, welche zwischen den Integralgebilden bestehen, und welche bei Berührungstransformationen erhalten bleiben.

Die Trägergebilde erster Stufe der eigentlichen Integralgebilde sind Umhüllungsgebilde von den Vereinen P_2.

In der That sind die $\bar{P}_{2,2}$ und die $\bar{C}_{2,2}$ die einzigen eigentlichen Integralgebilde (nach § 39, 3); jeder Verein C_2 entsteht aber als Umhüllungsgebilde von ∞^1 Vereinen P_2.

Man überzeugt sich leicht, daß die $\bar{P}_{2,2}$ die einzigen eigentlichen Integralgebilde sind, denen diese Eigenschaft zukommt; denn ∞' Curven haben eine Fläche als Umhüllungsgebilde, und eine Fläche kann überhaupt nicht Integralgebilde der Gleichung $\varphi = 0$ sein. Wir wollen sie die Fundamentallösungen nennen, weil

alle anderen als Umhüllungsgebilde derselben leicht gefunden werden können.

Ferner haben die $\bar{L}_{1,2}$ resp. die L_1 eine charakteristische Eigenschaft, welche keinem anderen Integralgebilde zukommt: 1. *Die $\bar{L}_{1,2}$ sind die einzigen zweidimensionalen Integralgebilde mit eindimensionalem Träger erster Stufe.*

Ferner: 2. *Haben ∞^1 L_1 ein zweidimensionales Umhüllungsgebilde, so ist dasselbe notwendig ein eigentliches Integralgebilde (nämlich ein Verein C_2).*

3. *Die Vereine P_2 dagegen sind Umhüllungsgebilde von ∞^2 Vereinen L_1.*

4. *Bedeutet T_1 ein eindimensionales Flächenelementgebilde, so ist jedes eigentliche Integralgebilde (J_2) dadurch bestimmt, daß es alle Flächenelemente eines T_1 enthalten soll, ausgenommen wenn T_1 ein Verein L_1 ist.*

Wenn nämlich T_1 ein Elementarkegel ist, so ist das betreffende J_2 der Verein P_2, dessen Träger die Spitze des Elementarkegels ist, wenn dagegen T_1 ein Verein C_1 ist, so ist J_2 der Verein $\bar{C}_{2,2}$ resp. C_2, dessen Träger die Trägerkurve von C_2 ist. Ist dagegen ein L_1 gegeben, so ist jede Curve, welche dieses L_1 enthält, Träger eines Integralgebildes ($\bar{C}_{2,2}$). —

Wir wollen wegen diesen vier charakteristischen Eigenschaften die L_1 als Charakteristiken bezeichnen (vgl. § 34, 4).

3. **Übertragung auf verwandte Gleichungen.**

a) Die Gleichung $rt - s^2 = 0$.

Wendet man auf die Gleichung $\varphi = 0$ die Legendre'sche Transformation an, so erhält man

$$rt - s^2 = 0.$$

Wir können daher, weil wir einerseits die Legendre'sche Transformation untersucht haben (§ 40, 5), andererseits eine vollkommene Übersicht der Integralgebilde von $\varphi = 0$ gewonnen haben, auch diese Gleichung nunmehr integrieren.

Zunächst ergiebt sich:

Die Fundamentallösungen werden durch die Ebenen dargestellt.

Daraus folgt weiter:

Alle übrigen eigentlichen Lösungen sind Umhüllungsgebilde von Ebenen, d. h. abwickelbare Flächen.

Ferner sind hier die Charakteristiken ebene geradlinige Elementstreifen (denn bei der Legendre'schen Transformation gehen die L_1 in solche Streifen über).

Man erkennt leicht, daß alle Eigenschaften der Charakteristiken sich übertragen haben: Durch eine Charakteristik, nämlich einen ebenen geradlinigen Elementstreifen, ist in der That eine abwickelbare Fläche nicht bestimmt; ferner: die Ebenen sind Umhüllungsgebilde von ∞^3 Charakteristiken.

b) Die Gleichung

$$N = (r\,t - s^2) - n^{\frac{1}{2}}\{r\,(1 + q^2) + t\,(1 + p^2) - 2\,p\,q\,s\} + n^2 = 0\,.$$

Wendet man auf die Gleichung $\varphi = 0$ die Dilatation an, so erhält man die hingeschriebene Gleichung $N = 0$ (nach § 40, 3b).

Hieraus folgt sofort: Die Fundamentallösungen der Gleichung $N = 0$ sind die Kugeln mit dem Radius 1, die übrigen Lösungen sind Kanalflächen von der Öffnung 1 (Umhüllungsflächen einer Schar von Kugeln mit dem Radius 1), die Charakteristiken sind reifenähnliche Gebilde. Die Trägerkurve eines solchen Reifens ist ein Kreis vom Radius 1, die Flächenelemente stehen senkrecht zur Ebene des Kreises.

Wir wollen ein Beispiel einer Integralfläche nennen: Die Gleichung

$$z^2 + x^2 = 1$$

definiert einen Cylinder vom Radius 1, also eine Kanalfläche.

In der That folgt aus

$$z = \sqrt{1 - x^2}$$

weiter

$$p = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad q = 0, \qquad n = \frac{1}{1-x^2},$$

$$r = -\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}, \qquad s = 0, \qquad t = 0,$$

$$N = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left\{-\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\right\} + \frac{1}{(1-x^2)^2} = 0\,.$$

4. **Die allgemeinen parobolischen Differentialgleichungen.** Nachdem wir zwei Beispiele kennen gelernt haben von Differentialgleichungen, welche sich durch Berührungstransformation auf die Form

$$\varphi = 0$$

bringen lassen, ergiebt sich von selbst die Fragestellung:

Welches ist die allgemeinste Form einer Differentialgleichung, die sich durch Berührungstransformation auf die Form $\varphi = 0$ bringen läßt?

Diese Differentialgleichungen wollen wir „parabolische Differentialgleichungen“ nennen, und nun die gestellte Frage beantworten, ohne indessen auf den Beweis einzugehen.

Die allgemeinste Form einer parabolischen Differentialgleichung ist nun:

$$N\psi + H\varrho + 2K\sigma + L\tau - M\varphi = 0,$$
$$= \varphi\{N(rt - s^2) + Hr + 2Ks + Lt + M\},$$

wo H, K, L, M und N Funktionen von x, y, z, p und q sind.

Hier müssen nun noch bestimmte Relationen bestehen.

Es muß nämlich die Gleichung

$$MN + K^2 - HL = 0$$

erfüllt sein; ferner müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\left(\frac{K}{N}\right)_1 + \left(\frac{L}{N}\right)_2 = 0, \quad \left(\frac{K}{N}\right)_2 + \left(\frac{H}{N}\right)_1 = 0,$$

wo die angewendeten Bezeichnungen die folgenden Bedeutungen haben:

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{L}{N} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{K}{N} \quad .$$
$$F_2 = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{K}{N} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{H}{N}.$$

Man kann leicht nachrechnen, daß bei der parabolischen Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

diese Bedingungen erfüllt sind.

Dasselbe gilt für die Gleichung

$$rt - s^2 - n^{\frac{1}{2}}\{r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs\} + n^2 = 0.$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
N &= 1, \\
H &= -n^{\frac{1}{2}}(1 + q^2), \\
K &= pqn^{\frac{1}{2}}, \\
L &= -(1 + p^2)n^{\frac{1}{2}}, \\
M &= n^2 = n\big((1 + q^2)(1 + p^2) + p^2q^2\big) = \frac{HL - K^2}{N}, \\
H_1 &= pn(1 + 3q^2), \\
K_1 &= nq(1 + 3p^2), \\
K_2 &= -np(1 + 3q^2), \\
L_2 &= -nq(1 + 3p^2).
\end{aligned}$$

Die Bedingungen der parabolischen Differentialgleichungen sind also in der That erfüllt.

Für alle parabolischen Differentialgleichungen gilt die Bemerkung, daß die Lösungen Umhüllungsgebilde von gewissen Fundamentallösungen, die eine dreigliedrige Schar bilden, sind, daß es ferner eine fünfgliedrige Schar von Charakteristiken giebt, mit den in Nr. 2 genannten Eigenschaften; denn alle (2) entwickelten Sätze beziehen sich auf Eigenschaften, die bei Berührungstransformationen erhalten bleiben.

§ 42. **Randwertaufgaben.**

1. **Integralflächen, die eine geschlossene Kurve enthalten.** Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hatten folgende Eigenschaft: Eine Lösung war im allgemeinen vollständig bestimmt durch die Forderung, daß sie eine bestimmte Kurve enthalten sollte. Bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung war dies nicht mehr der Fall. Es genügte nämlich zur Bestimmung einer Integralfläche nicht die Forderung, daß die Fläche eine bestimmte Kurve enthält, vielmehr muß in jedem einzelnen Punkte der Kurve auch noch die Tangentialebene vorgeschrieben sein.

Ist im speziellen eine geschlossene Kurve gegeben, so wird es noch eine unbegrenzte Menge von Integralflächen geben, welche diese Kurve enthalten und einer bestimmten partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Die Kurve schneidet auf jeder dieser Flächen ein Stück heraus, dessen Begrenzung sie bildet. Diese Flächen werden nun nicht alle die Eigenschaft haben, daß das von der geschlossenen Kurve begrenzte Stück von Singularitäten frei ist.

Beispiel: Es soll durch einen Kreis, der im Raume gegeben ist, eine Integralfläche der Gleichung $rt - s^2 = 0$ gelegt werden. Dann ist eine Lösung unmittelbar gegeben: die Ebene, welche den Kreis enthält. Lösungen der Aufgabe sind ferner alle Kegel und alle Cylinder, welche den Kreis enthalten. Von allen diesen Lösungen hat aber nur die Ebene, in welcher der Kreis liegt, die Eigenschaft, daß der gegebene Kreis auf ihr ein einfach zusammenhängendes, endliches, singularitätenfreies Flächenstück begrenzt. —

2. **Die Randwertaufgabe.** Die Randwertaufgabe besteht nun darin, *unter allen Integralflächen einer gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche eine gegebene geschlossene Kurve enthalten, diejenigen zu bestimmen, auf denen die gegebene Kurve ei*

singularitätenfreies endliches Gebiet begrenzt. — In unserem Beispiel würde also die Ebene des Kreises die einzige Lösung sein.

3. **Berandete Gebiete auf abwickelbaren Flächen.** Bevor wir die Randwertaufgabe für die Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

behandeln, wollen wir nur an folgenden Umstand erinnern: Eine abwickelbare Fläche wird umhüllt von den Ebenen einer eingliedrigen Schar. Daher hat eine geschlossene Kurve (C), welche auf der Fläche liegt und ein endliches Stück derselben begrenzt, die Eigenschaft, daß es zu jedem auf C gelegenen Punkte A mindestens einen entsprechenden auf C gelegenen Punkt A giebt, der in derselben Tangentialebene liegt. Wir wollen diesen Punkt einen dem Punkt C zugeordneten Punkt nennen.

Diese Bemerkung genügt, um nun die Randwertaufgabe zu behandeln, d. h. um durch eine geschlossene analytische Kurve eine abwickelbare Fläche zu legen, auf der die Kurve ein endliches, singularitätenfreies Stück begrenzt (wenn es eine solche Fläche überhaupt giebt).

4. **Lösung der Randwertaufgabe bei abwickelbaren Flächen.** Wenn die Randkurve (C) gegeben ist, so bestimme man zu jedem Punkt A_1 derselben die zugeordneten Punkte, d. h. man bestimme diejenigen Punkte A_1', $A_1^{(2)}$..., welche die Eigenschaft haben, daß es eine Ebene giebt, welche die Kurve (C) in A_1 und $A_1^{(k)}$ berührt. Es giebt deren immer eine endliche Anzahl.

Nun lege man durch A_1 und A_1' eine Ebene und lässt den Punkt A_1 auf der Kurve wandern, indem man immer die entsprechende zweimal berührende Ebene konstruiert. Nach einer endlichen Anzahl von Umläufen muß der zugeordnete Punkt wieder mit dem Punkt A_1' zusammenfallen. Verfährt man entsprechend, indem man nun A_1'', A_1''', $A_1^{(k)}$ an Stelle von A_1' setzt, so erhält man eine endliche Anzahl von abwickelbaren Flächen, unter denen sich auch die gesuchten Lösungen befinden müssen.

Welche von den auf diese Art gefundenen Flächen wirklich Lösungen sind, läßt sich nachträglich leicht entscheiden.

5. **Beispiel:**

Es sollen die abwickelbaren Flächen bestimmt werden, welche die Kurve

$$x = \cos\varphi,$$
$$y = \sin\varphi,$$
$$z = \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi$$

enthalten, und auf denen diese Curve ein endliches singularitätenfreies Stück begrenzt.

Nach dem angegebenen Verfahren müssen wir zunächst alle Ebenenbüschel bestimmen, deren Axen Tangenten der gegebenen Kurve sind. Soll eine Ebene einem solchen Büschel angehören, so muß ihre Gleichung die Form haben:

$$a(x - \cos\varphi) + b(y - \sin\varphi) + c(z - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi) = 0,$$

weil sie den Punkt

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi$$

enthält.

Überdies soll sie das Linienelement der Randkurve enthalten, dessen Träger der Punkt

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi$$

ist. Die Richtung dieses Linienelementes ist gegeben durch

$$\cos(l, x) : \cos(l, y) : \cos(l, z) = -\sin\varphi : \cos\varphi : -\cos\varphi \cdot \sin\varphi .$$

Demnach muß

$$-a\sin\varphi + b\cos\varphi - c\cos\varphi \cdot \sin\varphi = 0$$

sein.

Setzt man

$$a = \alpha\cos\varphi, \quad b = \beta\sin\varphi, \quad c = \beta - \alpha,$$

so ist die hinzukommende Bedingung erfüllt.

Demnach wird das Büschel der Tangentialebenen dargestellt durch die Gleichung

$$\alpha\cos\varphi\,(x - \cos\varphi) + \beta\sin\varphi\,(y - \sin\varphi) + (\beta - \alpha)(z - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi) = 0,$$

Hierin sind α und β beliebige Konstanten.

Jetzt soll zu dem Punkt $A(\varphi)$ ein zugeordneter Punkt $A'(\varphi')$ bestimmt werden, so daß die Ebene das Linienelement der Kurve enthält, dessen Träger der Punkt φ' ist.

Also muß φ' die beiden Gleichungen erfüllen:

$$\alpha\cos\varphi(\cos\varphi' - \cos\varphi) + \beta\sin\varphi(\sin\varphi' - \sin\varphi) + \frac{(\beta-\alpha)}{2}(\cos^2\varphi' - \cos^2\varphi) = 0.$$

$$-\alpha\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi' + \beta\sin\varphi\cos\varphi' - (\beta - \alpha)\cos\varphi'\cdot\sin\varphi' = 0.$$

Berechnet man hieraus φ', so bekommt man den zugeordneten Punkt. Zugleich erhält man, indem man α und β bestimmt (und damit auch c) — die Ebene, welche die Kurve in den zugeordneten Linienelementen berührt.

Wir erhalten auf diese Weise die Lösungen

(1) $$\alpha = 0, \quad \varphi' = \pi - \varphi.$$

(2) $$\beta = 0, \quad \varphi' = -\varphi.$$

Zur ersten Lösung gehört die Ebene:

$$\sin\varphi\,(y - \sin\varphi) + z - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi = 0.$$

Das Umhüllungsgebilde aller Ebenen, welche man durch Variieren von φ erhält, wird dargestellt durch die hingeschriebene Gleichung in Verbindung mit der durch Differentiation nach φ daraus hervorgegangenen:

$$y\cos\varphi - 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \cos\varphi\cdot\sin\varphi = 0$$

oder

$$y = \sin\varphi.$$

Die beiden Gleichungen zusammen lassen sich ersetzen durch die einzige:

$$z = \tfrac{1}{2}(1 - y^2)$$

oder

$$y^2 - 1 + 2z = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen parabolischen Cylinder dar, welcher in der That die gegebene Kurve enthält und eine Lösung der Aufgabe darstellt, weil die Kurve auf ihn ein reguläres einfach zusammenhängendes Flächenstück begrenzt.

(2) $$\beta = 0, \quad \varphi' = -\varphi$$

liefert die Ebene

$$\cos\varphi\,(x - \cos\varphi) - \left(z - \frac{\cos^2\varphi}{2}\right) = 0.$$

Läßt man φ variieren und bildet die Gleichung der eingehüllten Fläche, so hat man noch hinzuzunehmen die Gleichung:

$$-\sin\varphi\cdot x + 2\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cdot\cos\varphi = 0.$$

Man erhält hier aus

$$x = \cos\varphi,$$

$$z = \frac{\cos^2\varphi}{2}$$

oder

$$2z - x^2 = 0.$$

Auch dieser Cylinder ist eine Fläche, welche die verlangten Eigenschaften hat.

Die vorgelegte Randwertaufgabe hat also zwei Lösungen, nämlich die soeben bestimmten Cylinderflächen, und ausser ihnen kann keine andere abwickelbare Fläche, welche die Randkurve enthält, den gestellten Bedingungen genügen.

Z. B. enthält der Cylinder, dessen Gleichung lautet

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

wohl die Kurve, aber sie begrenzt auf ihm nicht ein endliches Flächenstück.

6. **Verallgemeinerung auf andere parabolische Differentialgleichungen.** Das Verfahren lässt sich ohne weiteres auch bei anderen parabolischen Differentialgleichungen anwenden, von denen man die Fundamentallösungen kennt. Zu einem Punkt A_1 findet man die zugeordneten Punkte, indem man diejenigen Fundamentallösungen bestimmt, welche die gegebene Randkurve außer in A_1 mindestens noch einmal berührt.

Indem man nun von diesen Fundamentallösungen die Umhüllungsgebilde konstruiert, erhält man eine endliche Anzahl von Flächen, unter denen sich die gesuchte Lösung auch befinden muß.

Anhang.

(Zu § 24, 2., S. 131.)

Wir wollen hier den Nachweis führen, daß unter den gemachten Voraussetzungen sich die neun Größen

$$\alpha_i, \ \beta_i, \ \gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

wirklich derart bestimmen lassen, daß ihre Determinante nicht verschwindet.

Zunächst ist

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha_i a_1 + \beta_i a_2 + \gamma_i a_3 &= \lambda_i \alpha_i, \\ \alpha_i b_1 + \beta_i b_2 + \gamma_i b_3 &= \lambda_i \beta_i, \quad (i = 1, 2, 3) \\ \alpha_i c_1 + \beta_i c_2 + \gamma_i c_3 &= \lambda_i \gamma_i. \end{aligned}$$

Wäre nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

gleich Null, so gäbe es drei nicht sämtlich verschwindende Größen A, B, C derart, daß

$$(2) \qquad \begin{aligned} A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 &= 0, \\ A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3 &= 0, \\ A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen (2) kann man aus den Gleichungen (1) die weiteren Gleichungen ableiten:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 A\alpha_1 + \lambda_2 B\alpha_2 + \lambda_3 C\alpha_3 &= 0, \\ \lambda_1 A\beta_1 + \lambda_2 B\beta_2 + \lambda_3 C\beta_3 &= 0, \\ \lambda_1 A\gamma_1 + \lambda_2 B\gamma_2 + \lambda_3 C\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Man kann also in den Gleichungen (2) die Größen A, B, C einfach ersetzen durch

$$\lambda_1 A, \quad \lambda_2 B, \quad \lambda_3 C.$$

Es folgt daher auch aus (3)

$$(4)\qquad \begin{aligned} \lambda_1^2 A\alpha_1 + \lambda_2^2 B\alpha_2 + \lambda_3^2 C\alpha_3 &= 0, \\ \lambda_1^2 A\beta_1 + \lambda_2^2 B\beta_2 + \lambda_3^2 C\beta_3 &= 0, \\ \lambda_1^2 A\gamma_1 + \lambda_2^2 B\gamma_2 + \lambda_3^2 C\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die neun Gleichungen (2), (3) und (4) zusammen, so folgt, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)$$

von Null verschieden ist,

$$\begin{aligned} A\alpha_1 = A\beta_1 = A\gamma_1 &= 0, \\ B\alpha_2 = B\beta_2 = B\gamma_2 &= 0, \\ C\alpha_3 = C\beta_3 = C\gamma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da nun die A, B, C nicht sämtlich verschwinden müssen, so müßten mindestens entweder die drei Größen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ oder die drei Größen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oder die drei Größen $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ verschwinden. Dies ist aber nicht der Fall, da die drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda_i & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda_i & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda_i \end{vmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

der Voraussetzung nach verschwinden.

Sobald also — was sich immer erreichen läßt — *von den neun Größen*

$$\alpha_i, \quad \beta_i, \quad \gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

nicht drei in irgend einer Zeile stehende sämtlich verschwinden, ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden.

Sachregister.

(Dg. ist zur Abkürzung für Differentialgleichung gesetzt.)

Berichtigungen.

S. 44, Zeile 6 von unten und S. 140, Zeile 3 von oben (beidesmal in den Überschriften) vor „Existenzbeweis" einzufügen: KOWALEWSKI'scher.

S. 68, Zeile 3 von unten, lies: Umhüllungsgebilde statt: Ümhüllungsgebilde.

S. 110, Zeile 8 von oben lies: $+ q \frac{\partial x}{\partial p}$ statt: $= q \frac{\partial x}{\partial p}$.

